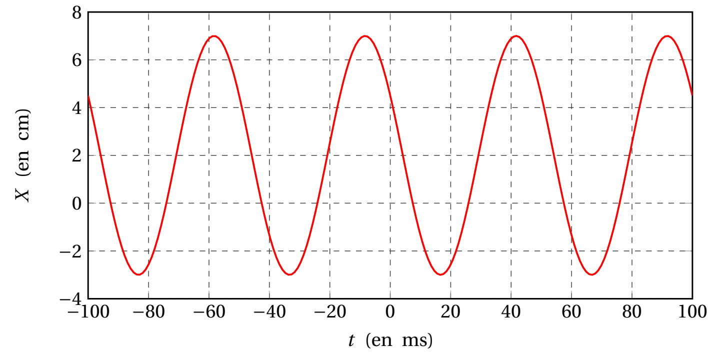
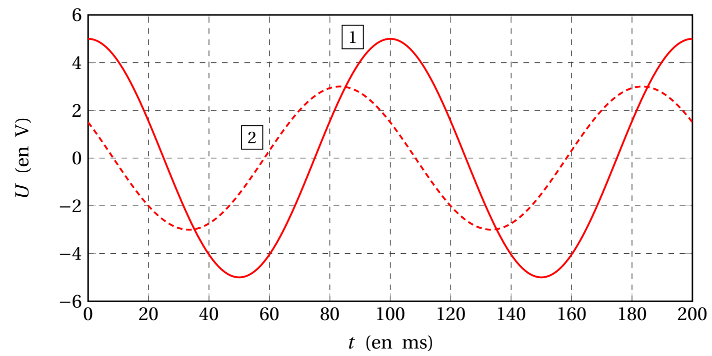
TD9 : Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique



Le graphe ci-dessus représente l'évolution temporelle d'un système masse + ressort. La position de la masse s'écrit sous la forme $X(t) = X_e + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Calculer X_e, X_m, ω_0 et φ puis calculer la vitesse de la masse en $t = 0$.

Exercice 2 : Signaux synchrones



Le graphique ci-dessus représente l'évolution temporelle de deux tensions alternatives. Déterminer l'amplitude, la période et la fréquence de chaque signal puis le déphasage entre les deux signaux.

⋆ Exercice 3 : Oscillations harmoniques

Un point matériel lié à un ressort élastique est en mouvement horizontal sans frottement. Sa position $x(t)$, mesurée à partir de la position d'équilibre, est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. A $t = 0$, on lance la masse depuis la position $x_0 = -3{,}0\,\text{cm}$, dans le sens des x croissants, avec une vitesse $v_0 = 50\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La mesure de la période propre des oscillations donne $T_0 = 1{,}0\,\text{s}$.

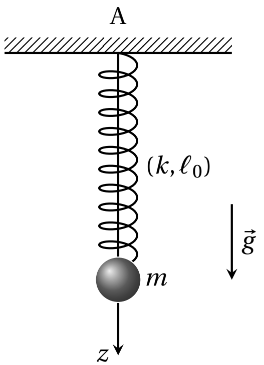
1. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, v_0, T_0 et t.
2. Calculer l'amplitude des oscillations.

⋆ Exercice 4 : Oscillations d'un circuit LC

Un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$ est initialement chargé sous une tension $U_0 = 6\,\text{V}$. On le connecte à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 25\,\text{mH}$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
2. Déterminer $u(t)$. Déterminer numériquement la fréquence des oscillations et leur amplitude.
3. Déterminer $i(t)$. Quelle est alors l'amplitude de l'intensité ?
4. Exprimer l'énergie du condensateur et celle de la bobine à tout instant. Vérifier que l'énergie totale reste constante.

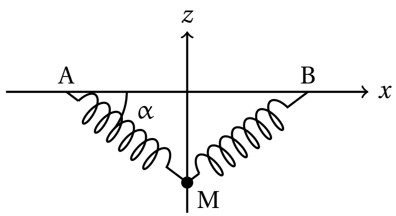
⋆ Exercice 5 : Oscillation verticales d'un ressort



Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est suspendu au plafond par l'une de ses extrémités A. Une masse ponctuelle m est accrochée à l'autre extrémité et peut osciller verticalement sans frottement. On note z l'altitude de la masse, mesurée **à partir de sa position d'équilibre**.

1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort lorsqu'il est en équilibre en fonction de ℓ_0, m, k et g, accélération du champ de pesanteur.
2. À l'instant $t = 0$, on comprime légèrement le ressort sur une distance a par rapport à sa longueur à l'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
3. Déterminer l'expression de $z(t)$. Exprimer la vitesse maximale de la masse.

⋆ Exercice 6 : Masse suspendue à deux ressorts



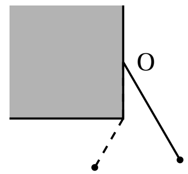
On étudie le mouvement vertical d'une masse m est suspendue à deux ressorts identiques de raideur k, de longueur à vide nulle, dont les points d'attache A et B sont distants de $2a$.

1. Exprimer l'angle α que font les ressorts avec l'horizontale lorsque la masse est à l'équilibre. Exprimer α en fonction de k, m, a et g, accélération du champ de pesanteur.
2. Exprimer la période des oscillations verticales de la masse.

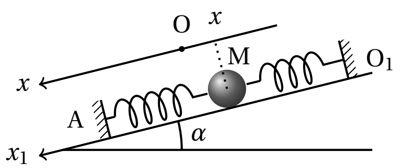
TD9 : Oscillateur harmonique

⋆ Exercice 7 : Pendule de longueur variable

Une masselotte de 100 g est liée par un fil de longueur 1 m à un point O fixé sur une paroi verticale. Lors de petites oscillations, le fil peut venir se plaquer contre un coin situé 50 cm plus bas que O. Quelle est la période des petites oscillations ?



⋆⋆ Exercice 8 : Oscillateur sur un plan incliné



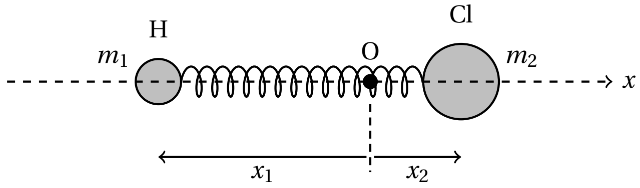
Une boule, assimilée à un point matériel M (masse m) est attachée à deux ressorts élastiques identiques (raideur k, longueur à vide ℓ_0) dont les extrémités sont fixées aux points O_1 et A ($O_1A = 2\ell_0$) d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (voir figure). La boule glisse sans frottement le long du plan incliné d'axe O_1x_1.

1. Déterminer l'abcisse $x_{1e} = O_1M_e$ du point matériel à l'équilibre.
2. On place l'origine O en M_e, et l'on pose : $x_1 - x_{1e} = x$, x étant l'abcisse de M par rapport à l'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du second ordre satisfaite par $x(t)$ (on fera intervenir une pulsation propre ω_0) puis résoudre cette équation sachant qu'on communique au point matériel, initialement à l'équilibre, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

⋆⋆ Exercice 9 : Molécule d'acide chlorhydrique

L'acide chlorhydrique est une molécule diatomique constituée d'un atome d'hydrogène et d'un atome de chlore associés par une liaison chimique simple. Sous l'effet de l'agitation thermique ou d'autres actions extérieures (champ électrique, abosrption d'un photon, etc...), les deux atomes oscillent autour de leur position d'équilibre. Les forces d'interaction mises en jeu au sein de la molécule (de nature électrostatique) et qui expliquent sa cohésion sont des forces conservatives, dont on admet qu'elles peuvent être assimilées à la force exercée par un ressort élastique lorsque les vibrations de la molécule sont de faible amplitude.

On note respectivement m_1 et m_2 les masses des atomes d'hydrogène et de chlore. On suppose leur mouvement rectiligne et horizontal, le long d'un axe Ox dont l'origine est placée au centre de gravité des deux masses. On note $\ell(t)$ la distance entre les deux atomes et $x_1(t)$ et $x_2(t)$ leurs positions respectives. On assimile la liaison chimique à un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On admet qu'on peut considérer le centre de gravité fixe dans un référentiel galiléen et on néglige dans tout le problème l'effet du poids.



1. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de ℓ, m_1 et m_2.
2. Exprimer la fréquence des oscillations de la molécule en fonction de k, m_1 et m_2. Montrer qu'on peut introduire une masse équivalente m_{eq} qui dépend de m_1 et m_2. Compte-tenu des valeurs de m_1 et m_2, faites une approximation sur la valeur de m_{eq}. Que peut-on dire du mouvement de l'atome de chlore, compte-tenu de cette approximation ?

Le principe de la spectroscopie infrarouge consiste à envoyer une onde électromagnétique dans le domaine des IR sur un échantillon pur d'une espèce chimique. Une partie du rayonnement incident est absorbé, à des fréquences qui sont caractéristiques des liaisons chimiques présentes dans l'échantillon. En particulier, pour une molécule diatomique, on peut montrer *qu'il existe un maximum d'aborption à la fréquence propre de vibration de la molécule.* En général, on caractérise les liaisons chimiques présentes dans un spectre IR par le *nombre d'onde* σ correspondant au maximum d'absorption, σ étant défini comme l'inverse de la longueur d'onde.

3. Sachant que la liaison H-Cl est caractérisée par un pic à $\sigma = 2990\,\text{cm}^{-1}$, calculer la raideur du ressort équivalent.
   Donnée : célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, masse de l'atome d'hydrogène : $m_1 = 1{,}67\cdot10^{-27}\,\text{kg}$

Solutions

Ex1 : $X_e = 2\,\text{cm}$, $X_m = 5\,\text{cm}$, $\omega_0 = 40\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\varphi = 1\,\text{rad}$. $v(t=0) = 6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Ex2 : $f = 10\,\text{Hz}$ $\Delta\varphi = 1{,}1\,\text{rad}$.

Ex3 : $x(t) = x_0\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{v_0T_0}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$, $A = 8{,}5\,\text{cm}$

Ex4 : 2. $u(t) = U_0\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $f = 318\,\text{Hz}$, $U_m = 6\,\text{V}$
3. $i(t) = -\sqrt{\frac{C}{L}}U_0\sin(\omega_0 t)$, $I_m = 0{,}12\,\text{A}$ 4. $\mathscr{E}_L = \frac{CU_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)$ $\mathscr{E}_C = \frac{CU_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t)$

Ex5 : 1. $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + mg/k$ 2. $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$
3. $z(t) = -a\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $v_{\max} = a\omega_0$

Ex6 : 1. $\tan\alpha = \frac{mg}{2ka}$ 2. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ **Ex7** : $T_0 = 1{,}7\,\text{s}$

Ex8 : 1. $x_e = \ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{2k}$ 2. $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$ $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Ex9 : 1. $x_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ell$ $x_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ell$ 2. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$ 3. $k = 530\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$