

TD8 : Dynamique - corrigé

★ Exercice 1 : Chute libre

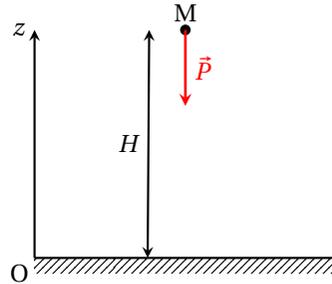
Premier cas : chute verticale

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottement, la masse n'est soumise qu'à son poids.

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = -g\vec{u}_z \iff_{\text{sur } (Oz)} \ddot{z} = -g$$

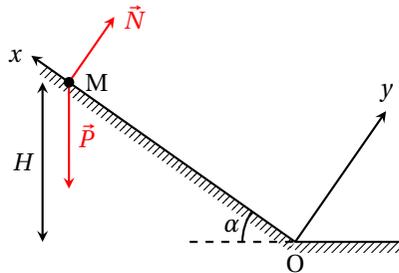
On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = H$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

$$\dot{z}(t) = -gt \quad \text{et} \quad z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$



La masse atteint le sol lorsque $z = 0$, à la date $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. À ce moment-là, $v = |\dot{z}| = \sqrt{2gH}$.

Deuxième cas : chute sur un plan incliné



On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottement, la masse n'est soumise qu'à son poids et à la réaction normale du plan incliné :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

On projette le PFD sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha \iff \ddot{x} = -g \sin \alpha$$

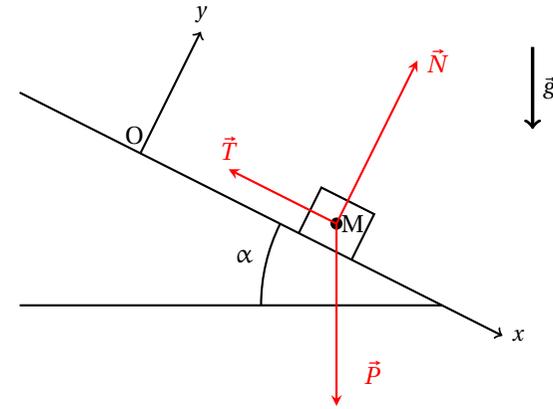
On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = \frac{H}{\sin \alpha}$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

$$\dot{x}(t) = -g \sin \alpha t \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{H}{\sin \alpha} - \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2$$

La masse atteint le sol lorsque $x = 0$, à la date $t = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2H}{g}}$. À ce moment-là, $v = |\dot{x}| = \sqrt{2gH}$.

En conclusion, **la vitesse qu'un objet acquiert à la suite d'une chute de hauteur donnée, sans frottement, dans le champ de pesanteur, est indépendante du chemin suivi au cours de la chute.** Nous démontrerons ce résultat et le généraliserons dans le prochain chapitre sur l'énergétique.

★ Exercice 2 : Solide sur un plan incliné



- Démonstration de cours (**à savoir refaire seul!**) : Le solide quitte son état de repos si $\alpha > \arctan f$.
- On applique le PFD au solide dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et aux réactions normale et tangentielle du plan incliné :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

On projette le PFD sur (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \|\vec{T}\| & (1) \\ 0 = -mg \cos \alpha + \|\vec{N}\| & (2) \end{cases}$$

On note qu'ici $\ddot{y} = 0$ car le mouvement reste rectiligne le long de l'axe (Ox) (pas de mouvement selon (Oy)).

L'équation (2) permet de déterminer la réaction normale du plan : $\|\vec{N}\| = mg \cos \alpha$.

Le solide glisse sur le plan incliné. On peut appliquer la deuxième loi de Coulomb :

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| \iff \|\vec{T}\| = f mg \cos \alpha$$

On injecte cette expression dans l'équation (1) : $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$. On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, pour obtenir la vitesse et la position du solide à tout instant :

$$\dot{x}(t) = g t (\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2} g t^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Le solide a chuté d'une altitude H lorsque $x = \frac{H}{\sin \alpha}$. Cela se produit à la date $t = \sqrt{\frac{2H}{g \sin \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha)}}$.

À ce moment-là, $v = \dot{x} = \sqrt{2gH(1 - f \cotan \alpha)}$.

TD8 : Dynamique - corrigé

★ Exercice 3 : Portée d'un tir avec frottement fluide

1. On applique le PFD au projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

On projette le PFD sur (Ox) et (Oz) :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x \iff \boxed{\frac{dv_x}{dt} + \frac{\alpha}{m} v_x = 0} & (1) \\ m \frac{dv_z}{dt} = -mg - \alpha v_z \iff \boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{m} v_z = -g} & (2) \end{cases}$$

2. On peut réécrire l'équation (1) sous la forme canonique : $\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ est la constante de temps du régime transitoire. On intègre une première fois l'équation (1), avec la condition initiale $v_x(0) = \dot{x}(0) = V_0 \cos \beta$ pour obtenir la composante horizontale de la vitesse à tout instant :

$$v_x(t) = V_0 \cos \beta e^{-t/\tau}$$

On intègre une deuxième fois, avec la condition initiale $x(0) = 0$ pour obtenir la composante horizontale de la position à tout instant :

$$x(t) = V_0 \tau \cos \beta (1 - e^{-t/\tau})$$

Quand $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow V_0 \tau \cos \beta = \frac{m V_0 \cos \beta}{\alpha}$.

Le mouvement tend vers une asymptote verticale d'équation $x = \frac{m V_0 \cos \beta}{\alpha}$.

★ Exercice 4 : Masse posée sur un support oscillant

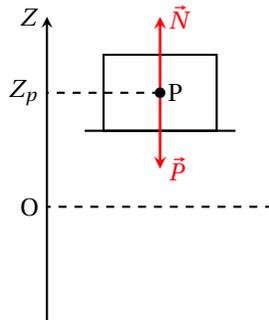
On applique le PFD à la masse, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur (OZ). La masse est soumise à son poids et à la réaction normale du support :

$$M \ddot{Z}_p = -Mg + \|\vec{N}\|$$

Connaissant $Z_p(t)$, on peut déterminer l'accélération du plateau : $\ddot{Z}_p(t) = -(2\pi f)^2 Z_m \cos(2\pi f t)$. On en déduit l'expression de la réaction :

$$\|\vec{N}\|(t) = M(g - (2\pi f)^2 Z_m \cos(2\pi f t))$$

Au cours du temps le terme $\cos(2\pi f t)$ oscille entre -1 et 1 donc la fonction $\|\vec{N}\|(t)$ oscille entre $M(g - (2\pi f)^2 Z_m)$ et $M(g + (2\pi f)^2 Z_m)$. Or la norme de la réaction n'a de sens que si elle est **positive**. La masse quitte le plateau **si la réaction vient à s'annuler au cours d'une oscillation**. Cela se



produit nécessairement si le minimum de cette fonction est négatif, c'est-à-dire si :

$$(2\pi f)^2 Z_m > g \iff \boxed{f > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{Z_m}}}$$

Cela se produit à l'endroit où $\|\vec{N}\|(t)$ est minimale, c'est-à-dire lorsque $\cos(2\pi f t) = 1$. La position est alors $Z_p = Z_m$ (sommet de la trajectoire).

★★ Exercice 5 : Chute dans un fluide visqueux

1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$

On projette le PFD sur (Oz) :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \alpha v \iff \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = -g}$$

2. On intègre une première fois, avec la condition initiale $v(0) = v_0$, pour obtenir la vitesse :

$$v(t) = (v_0 + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau$$

On intègre une deuxième fois, avec la condition initiale $z(0) = 0$, pour obtenir la position :

$$\boxed{z(t) = \tau(v_0 + g\tau)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t}$$

3. On cherche à résoudre l'équation $z(t) = 0$. En remplaçant t_c par $\beta\tau$, on obtient :

$$0 = \tau(v_0 + g\tau)(1 - e^{-\beta}) - g\beta\tau^2 \iff \boxed{1 - e^{-\beta} = \frac{g\tau}{v_0 + g\tau} \beta}$$

4. On ne peut pas donner d'expression littérale à la solution non nulle de cette équation. Seule une résolution numérique à la calculatrice est possible. On trouve :

$$\beta = 1,6 \iff \boxed{t_c = 3,2 \text{ s}}$$

★★ Exercice 6 : Chute dans un fluide visqueux (bis)

1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la force de frottement fluide :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \alpha \|\vec{v}\| \vec{v}$$

On projette le PFD sur un axe (Oz) **descendant**. On écrit $\vec{v} = v\vec{u}_z$ avec $v > 0$ car la masse tombe :

TD8 : Dynamique - corrigé

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v^2 \iff \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v^2 = g}$$

2. On détermine la vitesse limite en cherchant la solution particulière de l'équation ci-dessus :

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}}$$

3. L'asymptote a pour équation $v = v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$. La tangente à l'origine a pour équation $v = \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 t = gt$.

On a déterminé $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$ en utilisant l'équation différentielle, sachant que $v(0) = 0$.

L'intersection entre l'asymptote et la tangente à l'origine a lieu à la date τ telle que :

$$\sqrt{\frac{mg}{\alpha}} = g\tau \iff \boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{g\alpha}}}$$

4. La lecture de la courbe nous permet de déterminer la constante de temps : $\tau = 0,1$ s. On en déduit la

valeur du coefficient de frottement fluide : $\alpha = \frac{m}{g\tau^2} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. On transforme l'expression de l'équation du mouvement, en utilisant entre autres $g = \frac{v_\ell}{\tau}$:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m} v^2 = g \left(1 - \frac{v^2}{v_\ell^2}\right) \iff \frac{dv}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{g}{v_\ell^2} dt = \frac{dt}{\tau v_\ell}$$

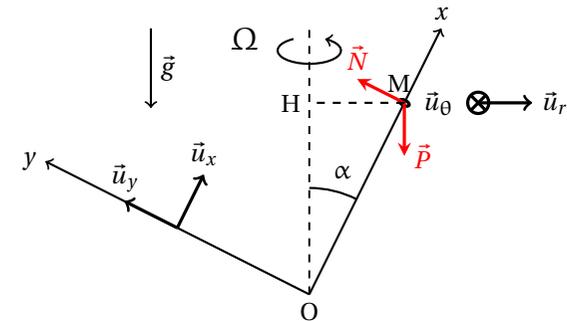
On intègre cette équation différentielle entre l'instant initial ($v = 0, t = 0$) et un instant quelconque (v, t) :

$$\int_0^v \frac{dv'}{v_\ell^2 - v'^2} = \int_0^t \frac{g}{v_\ell^2} dt' \iff \frac{1}{v_\ell} \operatorname{argth}\left(\frac{v}{v_\ell}\right) = \frac{t}{\tau v_\ell}$$

On inverse cette relation pour isoler v , ce qui aboutit au résultat suivant :

$$\boxed{v = v_\ell \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

★★ Exercice 7 : Équilibre relatif



1. Dans le référentiel terrestre, l'anneau a un mouvement circulaire et uniforme, de rayon $r = HM = x \sin \alpha$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \Omega$. Dans la base cylindrique, on exprime les vecteurs vitesse et accélération :

$$\boxed{\vec{v} = x \sin \alpha \Omega \vec{u}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = -x \sin \alpha \Omega^2 \vec{u}_r}$$

2. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et à la réaction normale de la tige :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

TD8 : Dynamique - corrigé

On souhaite projeter le PFD sur (Ox) . L'accélération de l'anneau s'écrit :

$$\vec{a} = -x \sin \alpha \Omega^2 \vec{u}_r = -x \sin \alpha \Omega^2 (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$$

Le poids vaut $\vec{P} = mg(-\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_y)$. La réaction normale n'a pas de composante sur \vec{u}_x puisqu'elle est perpendiculaire à l'axe (Ox) . Par conséquent, la projection du PFD sur \vec{u}_x aboutit à :

$$-m x_{\text{eq}} \sin^2 \alpha \Omega^2 = -mg \cos \alpha \iff x_{\text{eq}} = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}$$

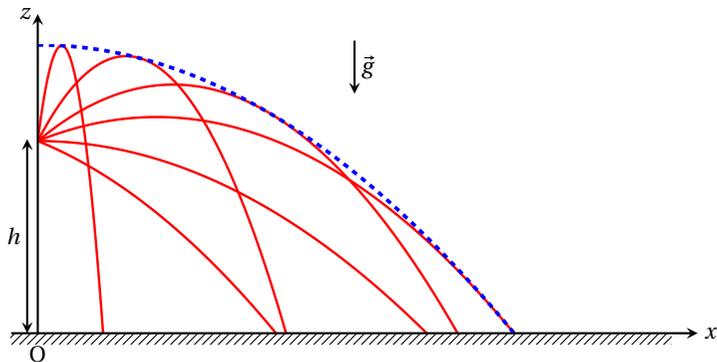
On effectue l'application numérique : $x_{\text{eq}} = 8,0 \text{ cm}$.

Remarque : Comme le support de l'anneau n'est pas plan mais rectiligne, il existe une infinité de directions possibles orthogonales à cet axe. Par conséquent, il est impossible de déterminer immédiatement la direction exacte de \vec{N} . Tout ce que l'on peut dire, c'est que cette réaction n'a pas de composante selon \vec{u}_x , mais elle peut en avoir selon \vec{u}_y ou selon \vec{u}_θ . On écrira alors :

$$\vec{N} = N_y \vec{u}_y + N_\theta \vec{u}_\theta$$

où N_y et N_θ sont deux inconnues, que l'on pourrait déterminer en projetant le PFD sur \vec{u}_y et \vec{u}_θ . D'ailleurs, vous pourriez démontrer que la projection sur \vec{u}_θ aboutit à $N_\theta = 0$, ce qui permet de conclure que la réaction normale est selon \vec{u}_y et justifie l'orientation du vecteur \vec{N} représenté sur le schéma.

★★★ Exercice 8 : Courbe de sécurité



1. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette sur (Ox) et (Oz) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre deux fois ces équations différentielles, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, $x(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$ et $z(0) = h$, pour obtenir la vitesse et la position de la masse à tout instant :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + h \end{cases}$$

À partir de ce système d'équations paramétriques, on peut écrire l'équation cartésienne de la trajectoire (voir méthode vue en cours) :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + h \iff z = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + \tan \alpha x + h$$

2. Pour un angle α donné, l'altitude maximale est atteinte lorsque $\dot{z} = 0$, à la date $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

L'altitude correspondante vaut $z_{\text{max}} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

3. Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe de sécurité, plaçons-nous à une abscisse x quelconque. Parmi toutes les trajectoires qui passent par l'abscisse x , celle qui correspond à la courbe de sécurité, à cette abscisse particulière, est celle pour laquelle z est maximale. Puisque chaque courbe correspond à une valeur différente de α , alors l'altitude de la courbe de sécurité en x , notée $z_{\text{sec}}(x)$, vérifie la relation suivante :

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0$$

Le calcul donne : $-\frac{g}{v_0^2} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} x^2 + \frac{x}{\cos^2 \alpha} = 0 \iff \tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$.

En réinjectant cette expression dans celle de $z(x)$, on obtient l'équation de la courbe de sécurité :

$$z_{\text{sec}}(x) = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h$$