

# Fiche d'exercices : Ensembles - Applications

**Exercice 1** Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Montrer que si  $A \subset B$  alors  $\overline{B} \subset \overline{A}$ . La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $E$ .

- 1) Montrer que si  $A \cap B = A \cap C$  et  $B \setminus A = C \setminus A$ , alors  $B = C$ .
- 2) Montrer que si  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ , alors  $B = C$ .

**Exercice 3** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $E$ .

- 1) Montrer que  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  et que  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .
- 2) Montrer que  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$  et que  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ .

**Exercice 4** Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . On définit la différence symétrique de  $A$  et  $B$  par  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

- 1) Montrer que  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
- 2) Exprimer  $\mathbb{1}_{A \Delta B}$  en fonction de  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$ .
- 3) Montrer que  $\Delta$  est associative.
- 4) Montrer que  $\cap$  est distributive par rapport à  $\Delta$ .

**Exercice 5** Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ .

- 1) Montrer que  $A \cup B = A \cap B$  si et seulement si  $A = B$ .
- 2) Montrer que  $A \setminus B = A$  si et seulement si  $B \setminus A = B$ .

**Exercice 6** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B_1, \dots, B_n$  des parties de  $E$ .

- 1) Montrer que  $A \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \dots \cap (A \cup B_n)$ .
- 2) Montrer que  $A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ .

**Exercice 7** Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ .

- 1) Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  l'équation  $A \cup X = B$ .
- 2) Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  l'équation  $A \cap X = B$ .

**Exercice 8** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

- 1) Étudier  $f$ .
- 2) Soient  $A = [0, 1]$ ,  $B = [0, 2]$  et  $C = [-3/2, 3/2]$ . Déterminer  $f(A)$ ,  $f(B)$  et  $f(C)$ .
- 3) Soient  $D = \{3\}$ ,  $E = \{1\}$  et  $F = [1, 3]$ . Déterminer  $f^{-1}(D)$ ,  $f^{-1}(E)$  et  $f^{-1}(F)$ .

**Exercice 9** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- |   |  |
|---|--|
| 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto [x]$ .   | 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ . |
| 2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$ . | 4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x)$ . |

**Exercice 10** Soit l'application  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(p, q) = p + q$ . Est-elle injective, surjective ? Déterminer  $f(P \times P)$ ,  $f^{-1}(\{4\})$ ,  $f^{-1}(P)$  où  $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 11** Soient  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  et  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Montrer que  $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  définit une bijection de  $P$  sur  $D$ .

**Exercice 12** Soient  $E, F$  et  $G$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  des applications. Montrer que :

- 1) Si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  aussi.
- 2) Si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  aussi.

**Exercice 13** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f \circ f = f$ . Montrer que si  $f$  est injective ou surjective, alors  $f = \text{Id}_E$ .

**Exercice 14** Soient  $E, F, G$  et  $H$  des ensembles. Soient  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$  des applications. On suppose que  $g \circ f$  et  $h \circ g$  sont bijectives. Montrer que  $f, g$  et  $h$  sont bijectives.

**Exercice 15** Soient  $E$  et  $F$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

- 1) Montrer que si  $A \subset B$  alors  $f(A) \subset f(B)$ .
- 2) Montrer que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
- 3) Montrer que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ . A-t-on toujours  $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$  ?
- 4) Montrer que si  $f$  est injective, alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

**Exercice 16** Soient  $E$  et  $F$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A, B \in \mathcal{P}(F)$ .

- 1) Montrer que si  $A \subset B$  alors  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ .
- 2) Montrer que  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .
- 3) Montrer que  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

**Exercice 17** Soient  $E$  et  $F$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. Montrer que :

- 1)  $f$  est surjective si et seulement si pour tout  $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$ .
- 2)  $f$  est injective si et seulement si pour tout  $A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$ .

**Exercice 18** Soient  $E$  et  $F$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. Montrer que :

- 1) Pour tout  $B \subset F, f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ .
- 2)  $f$  est bijective si et seulement si pour tout  $A \subset E, f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

**Exercice 19** Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Soit l'application  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  définie par  $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ .

- 1) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .
- 2) Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .
- 3) Déterminer  $f^{-1}$  lorsque  $f$  est bijective.