

Devoir n°11 (non surveillé)

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx.$$

1) Calculer I_0 .

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+3} n! (n+2)!}{(2n+4)!}.$$

EXERCICE 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$xy' - y = \ln x \text{ (sur }]0, +\infty[) ; \sqrt{1-x^2} y' + y = 1 \text{ (sur }]-1, 1[) ; 2x(1+x)y' + (1+x)y = 1 \text{ (sur }]0, +\infty[).$$

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y' \tan(x) + y \cos^2(x) = 0,$$

dont on cherche les solutions définies sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I . On considère la fonction z définie sur $] -1, 1[$ par $z(t) = y(\arcsin t)$: on a ainsi $y(x) = z(\sin x)$ pour tout $x \in I$.

1) Exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de z' et z'' .

2) Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $] -1, 1[$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.

3) Résoudre (E') puis (E) .