TD10 : Énergétique

⋆ Exercice 1 : Chute verticale avec frottements

Une masse ponctuelle $m = 200\,\mathrm{g}$ est lancée verticalement vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale $v_A = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. En supposant la force de frottement verticale, d'intensité constante $f = 0{,}50\,\mathrm{N}$, calculer :

1. La hauteur $h = AB$ dont elle est montée,
2. sa vitesse v'_A quand elle repasse par le point de lancement.

⋆ Exercice 2 : Champ gravitationnel terrestre

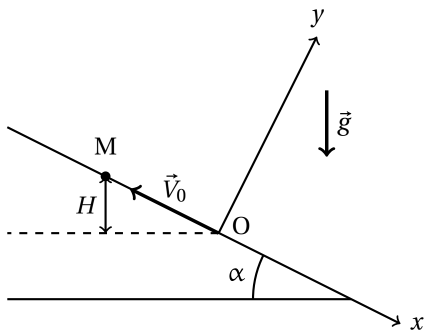
Lorsque l'on s'éloigne de la surface de la Terre, le champ de pesanteur ne peut plus être supposé uniforme. La force gravitationnelle qui s'exerce sur un objet de masse m varie suivant l'altitude z de la manière suivante : $\vec{F}_g(z) = -\frac{GmM_T}{(R_T+z)^2}\vec{u}_z$ où G est la constante de gravtitation universelle, M_T est la masse de la Terre et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire vertical ascendant.

1. Montrer que $\vec{F}_g$ est conservative et exprimer son énergie potentielle $E_p(z)$ (on prendra l'origine de l'énergie potentielle à l'infini).
2. On lance une masse ponctuelle m depuis la surface de la Terre, à la verticale, avec une vitesse initiale v_0. On souhaite déterminer son mouvement ultérieur en tenant compte de la variation du champ de pesanteur avec l'altitude. Pour simplifier, on suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

a) Déterminer jusqu'à quelle distance du centre de la Terre s'éloigne la masse avant de retomber.

b) Montrer qu'au-delà d'une certaine valeur de v_0 (appelée deuxième vitesse cosmique v_2), la masse ne retombe jamais sur la Terre (elle s'en éloigne à l'infini, c'est-à-dire qu'elle quitte le champ d'attraction terrestre).

⋆ Exercice 3 : Solide sur un plan incliné



Un point matériel M de masse m est lancé depuis l'origine d'un repère (Oxy) sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ ascendante. On note f le coefficient de frottement solide entre M et le plan.

1. En utilisant le PFD, exprimer la réaction $\vec{R}$ du plan incliné sur la masse en fonction de f, m, g et α.
2. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer l'altitude maximale H_m atteinte par M.
3. Calculer la variation d'énergie cinétique, d'énergie potentielle et d'énergie mécanique du point matériel au cours de la phase de montée.

⋆ Exercice 4 : Barrière de potentiel

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe Ox galiléen dans le champ de force $F(x)$ conservatif associé à l'énergie potentielle $E_p = m\omega^2\left(\frac{x^4}{a^2} - x^2\right)$ où a et ω sont des constantes positives.

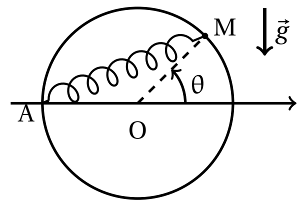
1. Tracer le graphe de $E_p(x)$. Quelles sont les positions d'équilibre du système ? Quelle est la stabilité de chacune d'entre elle ? Déterminer la pulsation des petites oscillations autour des positions d'équilibre stables.
2. Exprimer la force $F(x)$ qui dérive de cette énergie potentielle.
3. On pose $\varepsilon = x - x_s$ où x_s est l'abscisse de l'une des positions d'équilibre stable. Établir une expression approchée de l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$ autour de 0. Retrouver l'expression de la pulsation des petites oscillations.
4. On suppose que M est au repos dans l'une des deux positions d'équilibre stable. On voudrait le déplacer jusqu'à l'autre position d'équilibre stable. Quelle est la vitesse minimale qu'il faut lui fournir pour que cela soit possible ?

⋆⋆ Exercice 5 : Point glissant sans frottement sur un cercle

Un point matériel M de masse m est posé à $t = 0$ au sommet d'un cercle de rayon R. M glisse ensuite **sur** le cercle sans frottement jusqu'au moment où il décolle du cercle et amorce un mouvement de chute libre. On se propose dans cet exercice de déterminer l'angle θ (mesuré à partir du sommet du cercle) pour lequel M décolle.

1. À l'aide d'un raisonnement énergétique, montrer qu'à tout instant :
$$mR\dot{\theta}^2 = 2mg(1-\cos\theta)$$
2. Exprimer la réaction du cercle sur M en fonction de θ.
3. Déterminer l'angle θ pour lequel M quitte le cercle.

⋆⋆ Exercice 6 : Équilibre sur un cercle



Une masse m est liée à un cercle fixe dans le plan vertical, de centre O et de rayon R. La liaison est supposée sans frottements. La masse est également attachée à un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide nulle, fixé en A. La position de la masse est repérée par l'angle θ mesuré à partir de l'horizontale.

1. Exprimer l'énergie potentielle totale de la masse en fonction de θ.
2. En déduire les positions d'équilibres de la masse. Les représenter graphiquement.
3. Étudier la stabilité des positions d'équilibre et exprimer la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

⋆⋆ Exercice 7 : Mouvement rectiligne d'un véhicule à moteur

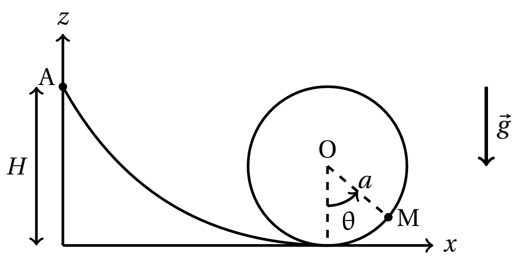
Un véhicule à moteur a un mouvement rectiligne suivant un axe horizontal Ox. Le moteur actionne les roues qui frottent contre le sol. Ces frottements sont moteurs (ce sont eux qui permettent de faire avancer le véhicule) et on suppose qu'ils communiquement une puissance $\mathscr{P}$ **constante** au véhicule. On tient également compte de la résistance de l'air qui exerce sur le véhicule une force $\overrightarrow{F} = -\beta m v \vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et β est une constante positive. Le véhicule part avec une vitesse nulle en $x = 0$ pour $t = 0$ dans le sens des x positifs.

1. À l'aide du théorème de la puissance cinétique, montrer que : $\frac{mv^2 \mathrm{d}v}{\mathscr{P} - \beta m v^3} = \mathrm{d}x$ (on pourra utiliser $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$).
2. Intégrer par la méthode de séparation des variables entre le point de départ et un point quelconque de la trajectoire et déterminer l'expression de la fonction $x(v)$.

   Indication : Une primitive de la fonction $f(v) = \frac{mv^2}{\mathscr{P} - \beta m v^3}$ est $F(v) = -\frac{1}{3\beta}\ln\left(\mathscr{P} - \beta m v^3\right)$
3. On admet que le véhicule roule jusqu' à $x \to \infty$. Montrer que sa vitesse tend vers une limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction de $\mathscr{P}$, m et β.
4. A.N. : $m = 900\,\mathrm{kg}$; $\mathscr{P} = 60\,\mathrm{kW}$; $v_\ell = 144\,\mathrm{km/h}$. Quelle est la valeur de β ? Au bout de quelle distance le véhicule aura-t-il atteint la vitesse $v_\ell/2$?

⋆⋆ Exercice 8 : Looping

Un point matériel M se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière circulaire (toboggan terminé par un cercle de rayon a). Il est lâché en A, d'une hauteur H , sans vitesse initiale. On note g l'intensité du champ de pesanteur.



Déterminer à partir de quelle hauteur $H_{\min}$ le point M, lâché sans vitesse initiale en A, effectue un tour complet du looping sans chuter à l'intérieur du cercle.

⋆⋆ Exercice 9 : Pendule butant contre un clou

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ et d'une masse ponctuelle m accrochée à son extrémité. Le fil est accroché en un point O fixe du référentiel d'étude supposé galiléen. Un clou est planté en A, à la verticale du point O, à une distance sous ce dernier $\mathrm{OA} = \frac{2}{3}\ell$. On suppose que lorsque le fil bute contre le clou, cela se fait sans perte énergétique.

1. On écarte la masse d'un angle $\theta_0 = 20°$ par rapport à la verticale (du côté où le fil n'est pas en contact avec le clou) et on la lâche sans vitesse initiale. Calculer la position angulaire après une demi-oscillation.
2. On écarte la masse d'un angle $\theta_0 = 90°$ par rapport à la verticale (du côté où le fil n'est pas en contact avec le clou) et on la lâche sans vitesse initiale. La masse va-t-elle s'enrouler autour du clou ?

Solutions :

Ex1 : 1. $h = \dfrac{m v_{\mathrm{A}}^2}{2(mg+f)} = 4{,}1\,\mathrm{m}$ 2. $v'_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{A}}\sqrt{\dfrac{mg-f}{mg+f}} = 7{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Ex2 : 2.a) $r = \left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{v_0^2}{2GM_T}\right)^{-1}$ 2.b) $v_2 = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}}$

Ex3 : 1. $\vec{R} = mg\cos\alpha\left(f\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$ 2.$H_m = \dfrac{V_0^2}{2g\left(1 + f\mathrm{cotan}\alpha\right)}$ 3. $\Delta E_c = -\dfrac{1}{2}mV_0^2$

$\Delta E_p = \dfrac{1}{1 + f\mathrm{cotan}\alpha}\cdot\dfrac{1}{2}mV_0^2$ $\Delta E = -\dfrac{f\mathrm{cotan}\alpha}{1 + f\mathrm{cotan}\alpha}\cdot\dfrac{1}{2}mV_0^2$

Ex4 : 1. $x = 0$: instable ; $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$: stables.   3. $v = \dfrac{a\omega}{\sqrt{2}}$

Ex5 : 2. $N = mg(3\cos\theta - 2)$ 3. $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

Ex6 : 1. $E_p(\theta) = mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)$ 2. $\tan\theta = \dfrac{mg}{kR}$ 3. $\omega_0 = \left(\left(\dfrac{g}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{k}{m}\right)^2\right)^{1/4}$

Ex7 : 2. $x = \dfrac{1}{3\beta}\ln\left(\dfrac{\mathscr{P}}{\mathscr{P} - \beta m v^3}\right)$ 3. $v_\ell = \left(\dfrac{\mathscr{P}}{\beta m}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. $\beta = 1{,}0.10^{-3}\,\mathrm{m^{-1}}$ $x = 43\,\mathrm{m}$.

Ex8 : $H_{\min} = \dfrac{5a}{2}$

Ex9 : 1. $\theta = -35°$ 2. oui