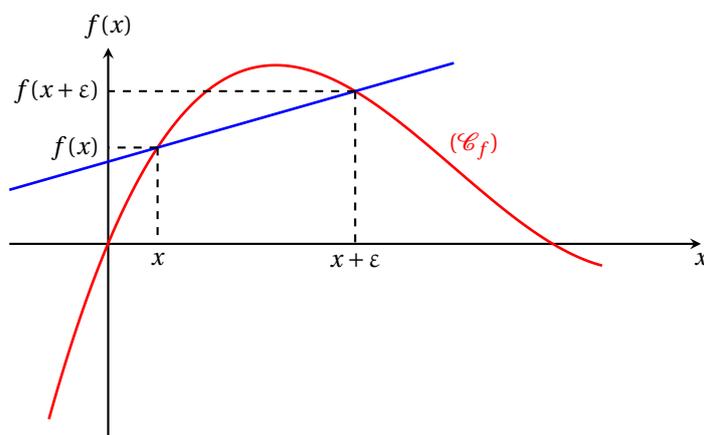


# Éléments de calcul différentiel

## 1 Dérivée d'une fonction d'une seule variable

### 1.1 Taux d'accroissement d'une fonction entre deux points

On considère un point  $M$  pouvant se déplacer librement le long d'un axe  $(Ox)$  rectiligne, et une fonction  $f(x)$  pouvant prendre une valeur en tout point de cet axe. On peut représenter les variations de la fonction  $f$  en tout point de l'axe à l'aide d'une courbe représentative  $(\mathcal{C}_f)$  tracée sur un graphe.



Sur ce graphe, on a tracé la corde de la fonction  $f$  entre le point d'abscisse  $x$  et le point d'abscisse  $x + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  un réel quelconque.

Le **taux d'accroissement** de la fonction  $f$  entre ces deux points est égal au coefficient directeur de cette corde, c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

On peut interpréter cette relation d'une autre manière. Connaissant la valeur de la fonction  $f$  au point  $x$  et le taux d'accroissement entre  $x$  et  $x + \varepsilon$ , on peut déterminer la valeur de la fonction  $f$  au point  $x + \varepsilon$  de la manière suivante :

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \varepsilon$$

Le taux d'accroissement entre  $x$  et  $x + \varepsilon$  est une quantité qui permet de déterminer la façon dont la fonction  $f$  varie quand on se déplace du point d'abscisse  $x$  au point d'abscisse  $x + \varepsilon$ .

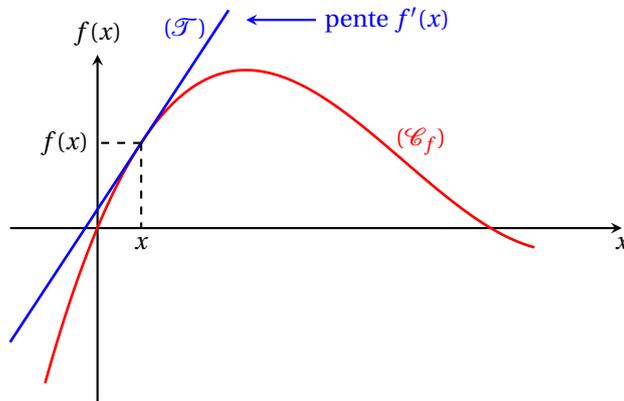
### 1.2 Dérivée d'une fonction en un point

Le résultat précédent est valable  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, on est autorisé à choisir  $\varepsilon$  **aussi petit que l'on veut**. Autrement dit, on peut passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si la fonction  $f$  est suffisamment régulière autour de  $x$  (continue et sans brisure de pente), alors on définit la **dérivée de  $f$  au point  $x$**  comme la limite du taux d'accroissement quand  $\varepsilon$  tend vers zéro :

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

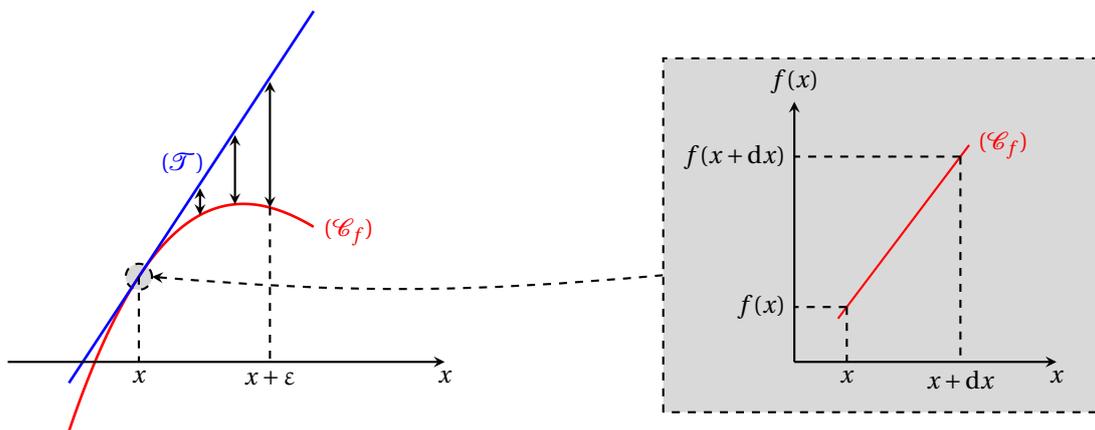
On peut interpréter géométriquement  $f'(x)$  comme le **coefficient directeur de la tangente  $(\mathcal{T})$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , au point d'abscisse  $x$**  (voir graphe ci-après).



En physique on souhaite utiliser la notion de dérivée, mais d'une manière plus agile qu'en utilisant sans arrêt le passage à la limite. Les concepts que nous allons introduire à partir de maintenant ont été élaborés à la même époque par Isaac NEWTON et Gottfried LEIBNIZ, sous le nom de **calcul différentiel**. Aujourd'hui, le calcul différentiel est un outil incontournable dans le domaine des sciences.

### 1.3 Calcul différentiel

Pour éviter le passage à la limite, nous définissons un objet mathématique appelé **variation infinitésimale** (ou bien **élémentaire**) de la variable  $x$  et noté  $dx$ . Nous ne donnons pas la définition rigoureuse de cette quantité mais, physiquement, on l'interprétera comme **une variation de  $x$  aussi petite que l'on souhaite**, c'est-à-dire un déplacement sur l'axe  $(Ox)$  aussi petit que l'on veut. On dit aussi que  $dx$  est un terme **infinitement petit**.



Voici comment on peut utiliser cette quantité : lorsque l'on se trouve en  $x$  et que l'on suit la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en se déplaçant en un point d'abscisse différente  $x + \epsilon$ , on s'éloigne nécessairement de  $(\mathcal{T})$  (voir figure ci-dessus, à gauche). Toutefois, plus le déplacement sur l'axe  $(Ox)$  est petit et plus cet écart est faible. En poussant ce raisonnement à la limite, on dira qu'au point d'abscisse  $x + dx$ , l'écart entre  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{T})$  est aussi petit que l'on veut, ce qui revient à dire que l'on peut le négliger. **Tout se passe comme si on s'était déplacé sur  $(\mathcal{C}_f)$  sans s'éloigner de sa tangente!**

L'un des grands avantages de la notation différentielle, c'est qu'elle permet de définir un déplacement sur l'axe des abscisses ( $dx$  est une quantité définie, non nulle). On peut donc représenter ce déplacement sur un schéma (voir figure ci-dessus, à droite). Comme  $dx$  est infinitement petit, on peut négliger la courbure de  $(\mathcal{C}_f)$  à cette échelle. Cela revient à dire que l'on peut considérer que la portion de  $(\mathcal{C}_f)$  entre  $x$  et  $x + dx$  est parfaitement rectiligne. Cela implique que l'on peut utiliser la notation différentielle pour définir la dérivée de la fonction  $f$  au point  $x$  :

La dérivée de la fonction  $f$  au point  $x$  est égale au taux d'accroissement entre  $x$  et  $x + dx$  :

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Où  $df = f(x + dx) - f(x)$  est la **variation infinitésimale de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x + dx$** .

Concrètement, la notation  $dx$  remplace  $\epsilon \rightarrow 0$  et est beaucoup plus simple à manipuler mathématiquement. Il est à noter que cette définition de  $f'(x)$  est **exacte**. Il ne s'agit pas d'une approximation. On reconnaît ici la notation classique pour la dérivée d'une fonction en physique, que l'on interprète désormais comme le quotient de deux variations infinitésimales.

Comme on l'a vu plus haut, on peut interpréter cette écriture d'une autre manière. Connaissant au point  $x$  la valeur d'une fonction  $f$  et celle de sa dérivée  $f'$ , on peut en déduire la valeur de  $f(x + dx)$  de la manière suivante :

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$$

On peut encore écrire la variation  $df = f(x + dx) - f(x)$  de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x + dx$  sous la forme :

$$df = f'(x)dx$$

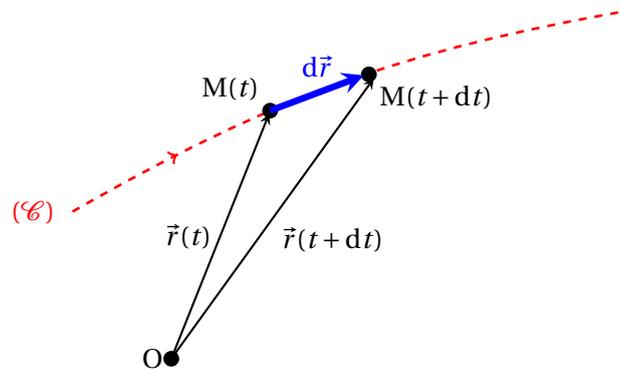
L'égalité ci-dessus s'appelle l'**écriture différentielle** de la fonction  $f$ .

## 1.4 Application : vecteur déplacement élémentaire, vitesse, accélération

Le raisonnement que l'on vient de conduire peut être généralisé :

- à n'importe quelle variable, en particulier le temps,
- à n'importe quelle fonction d'une seule variable, qu'elle soit scalaire ou vectorielle.

C'est ainsi qu'en mécanique on définit la **vitesse instantanée** (ou simplement vitesse) d'un point mobile.



En mécanique, on caractérise le déplacement d'un point mobile dans l'espace par sa **trajectoire** (en pointillés, notée  $(\mathcal{C})$  sur la figure ci-dessus). Mathématiquement, celle-ci peut être décrite par une fonction vectorielle du temps :  $\vec{r}(t)$ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par le vecteur position du mobile au cours du temps dans un référentiel et un repère donné.

Pour définir la vitesse du mobile, on considère un **déplacement infinitésimal**, entre deux dates infiniment proches  $t$  et  $t + dt$ . On appelle **vecteur déplacement élémentaire** la quantité :

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$$

et qui correspond au déplacement du mobile entre ces deux dates. On peut également interpréter  $d\vec{r}$  comme une **variation infinitésimale de la fonction  $\vec{r}(t)$  entre  $t$  et  $t + dt$** . La vitesse est alors définie de la manière suivante :

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Comme on vient de le voir plus haut, cette définition sous la forme d'un quotient de deux variations infinitésimales est équivalente, du point de vue mathématique, à la dérivée de  $\vec{r}(t)$  par rapport au temps. On a ainsi défini une fonction  $\vec{v}(t)$  qui prend une valeur bien définie à chaque instant.

Quant à l'accélération en  $t$ , elle est définie de manière analogue, en comparant les vecteurs vitesses  $\vec{v}(t)$  et  $\vec{v}(t + dt)$  :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

## 2 Variations d'une fonction de plusieurs variables

### 2.1 Illustration sur un exemple : le champ de pression

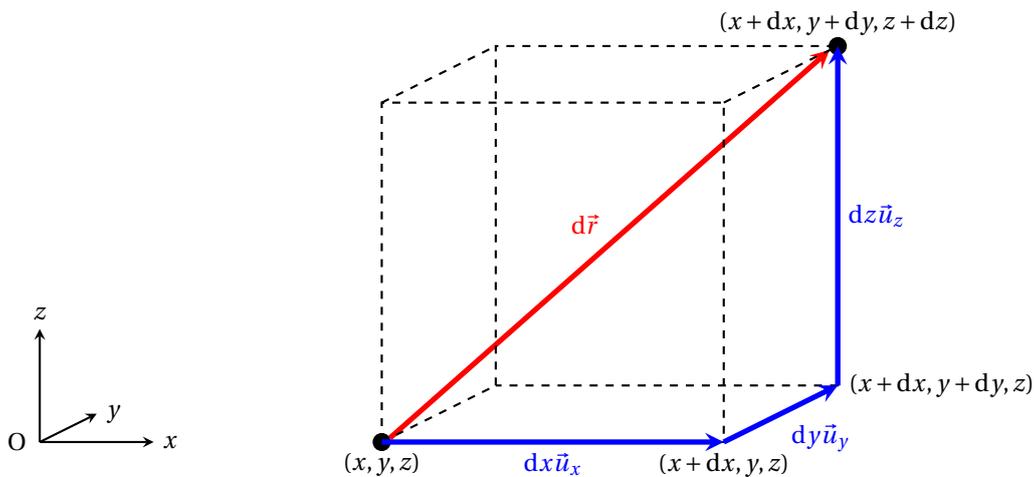
#### 2.1.1 Notion de champ de pression, degrés de liberté

La pression est une quantité thermodynamique qui peut être définie de manière **locale**, c'est-à-dire en chaque point d'un système. Par exemple, la pression dans l'atmosphère varie selon l'altitude (elle diminue à mesure que l'on s'élève en altitude). Pour dire cela, nous considérons implicitement que l'on peut attribuer à chaque point  $M$  de l'espace une pression  $P(M)$ . Plus l'altitude du point  $M$  est élevée et plus la pression est faible. Nous justifierons plus tard cette année que cela a du sens de parler de pression "en un point de l'espace".

Pour l'instant, considérons un système quelconque (l'atmosphère, un océan, un fluide s'écoulant dans une canalisation, etc.) comme un espace tridimensionnel dans lequel on peut définir une position à l'aide d'un repère cartésien  $(Oxyz)$ . Parler de pression  $P(M)$  en tout point  $M$  du système (on parle alors de **champ de pression**) revient à dire que l'on considère la pression comme une fonction des trois variables d'espace :  $P(x, y, z)$ . Nous allons nous intéresser à la manière dont la pression varie lorsque l'on se déplace dans l'espace. Contrairement au cas d'une fonction d'une seule variable, il y a ici trois **degrés de liberté** de mouvement, c'est-à-dire trois déplacements possibles dans des directions orthogonales les unes aux autres :

- si l'on se déplace parallèlement à l'axe  $(Ox)$ , seule la coordonnée  $x$  varie tandis que  $y$  et  $z$  demeurent invariantes,
- si l'on se déplace parallèlement à l'axe  $(Oy)$ , seule la coordonnée  $y$  varie tandis que  $x$  et  $z$  demeurent invariantes,
- etc.

Au même titre que l'on a défini une variation infinitésimale  $dx$  pour une fonction d'une seule variable  $x$ , correspondant à un déplacement élémentaire selon  $\vec{u}_x$ , on peut définir les variations  $dy$  et  $dz$  pour des déplacements élémentaires selon  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ . Ces déplacements élémentaires sont représentés sur la figure ci-dessous.



Lorsque l'on combine ces trois mouvements dans des directions orthogonales, on obtient un déplacement élémentaire quelconque à trois dimensions, exprimé ici en coordonnées cartésiennes :

$$d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

#### 2.1.2 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Pour simplifier, considérons le cas d'un déplacement uniquement selon  $\vec{u}_x$ . D'un point de vue mathématique, la situation est proche de ce que l'on vient de voir pour une fonction d'une unique variable. On peut notamment définir un équivalent de dérivée de la fonction  $P(x, y, z)$  pour un déplacement **uniquement selon  $\vec{u}_x$** . Cette quantité s'appelle la **dérivée partielle de la fonction  $f$  par rapport à  $x$ , à  $y$  et  $z$  constants**. Elle est définie de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{P(x + dx, y, z) - P(x, y, z)}{dx}$$

Bien entendu, on peut définir de la même manière les dérivées partielles de  $P$  par rapport à  $y$  et  $z$ , respectivement pour un déplacement selon  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z} = \frac{P(x, y + dy, z) - P(x, y, z)}{dy} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y} = \frac{P(x, y, z + dz) - P(x, y, z)}{dz}$$

### 2.1.3 Différentielle

Par définition de la dérivée partielle, lors d'un déplacement entre  $(x, y, z)$  et  $(x + dx, y, z)$ , la variation de pression s'écrit :

$$dP = P(x + dx, y, z) - P(x, y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx$$

Cette expression est analogue au cas d'une fonction d'une seule variable, en remplaçant simplement la dérivée (dite "**droite**")  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  par la dérivée partielle  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ .

Rq : dans l'écriture d'une dérivée partielle, les variables en indice à l'extérieur de la parenthèse sont celles qui restent invariantes ("dérivée partielle par rapport à  $x$ , à  **$y$  et  $z$  constants**"). Généralement, il n'y a pas d'ambiguïté sur ces variables et l'on utilise la notation  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ , moins lourde.

De la même manière on peut écrire la variation de pression lorsque l'on se déplace de  $(x, y, z)$  à  $(x, y + dy, z)$  :

$$dP = P(x, y + dy, z) - P(x, y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy$$

ou encore lorsque l'on se déplace de  $(x, y, z)$  à  $(x, y, z + dz)$  :

$$dP = P(x, y, z + dz) - P(x, y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz$$

Enfin, on imagine un déplacement quelconque dans les trois directions de l'espace, entre  $(x, y, z)$  et  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Comme ces trois déplacements se font dans des directions indépendantes de l'espace, on admet que la variation de pression  $dP = P(x + dx, y + dy, z + dz) - P(x, y, z)$  s'écrit simplement comme **la somme des contributions pour un déplacement dans chacune des trois directions de l'espace**. La différentielle de la pression, vue comme une fonction des trois variables  $x, y$  et  $z$ , s'écrit :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz$$

## 2.2 Généralisation

Soit  $f$  une fonction possédant un nombre  $N$  quelconque de variables :  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Sa différentielle s'écrit sous la forme :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right) dx_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i$$

## 2.3 Opérateur gradient

Revenons à l'exemple du champ de pression  $P(x, y, z)$ . Nous avons écrit la différentielle de  $P$  sous la forme :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz$$

Cette écriture fait penser à l'expression d'un produit scalaire. On vérifie rapidement qu'on peut effectivement écrire la différentielle sous la forme :

$$dP = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Le vecteur de droite  $dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$  n'est autre que le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{r}$ . Le vecteur de gauche s'appelle le **gradient de  $P(x, y, z)$**  (ou simplement "gradient de pression"). L'écriture différentielle de  $P(x, y, z)$  prend alors la forme ci-dessous :

$$dP = \overrightarrow{\text{grad}P} \cdot d\vec{r}$$

Cette relation définit  $\overrightarrow{\text{grad}P}$ . Dans le système de coordonnées cartésiennes, le gradient de pression s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{u}_z$$

Comparons maintenant l'écriture différentielle d'une fonction dans le cas 1D (une seule variable d'espace  $x$ ) et 3D (trois variables d'espace  $x, y$  et  $z$ ).

$$\begin{cases} df = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx & (1D) \\ df = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot d\vec{r} & (3D) \end{cases}$$

La première équation permet d'exprimer la variation de la fonction  $f(x)$  lorsque l'on effectue un déplacement élémentaire le long de l'axe  $(Ox)$ , de  $x$  à  $x+dx$ . La seconde exprime la variation de la fonction  $f(x, y, z)$  lorsque l'on effectue un déplacement élémentaire dans l'espace, de  $(x, y, z)$  à  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ . La similitude de ces deux écritures nous permet de comprendre que **le gradient joue un rôle de "dérivée spatiale" à trois dimensions**.

Le gradient porte le nom "d'opérateur" car c'est un objet mathématique qui agit sur des **fonctions**, contrairement à une fonction  $f$  qui agit sur des réels ( $x, y$  ou  $z$  par exemple). Il a la même nature que l'opérateur dérivée "droite" ou dérivée partielle, à ceci près que le gradient est un opérateur **vectorel**, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de définir une base de projection pour donner ses coordonnées. C'est ce que l'on a fait plus haut en choisissant arbitrairement la base cartésienne. Vous verrez l'an prochain l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques et sphériques.

On peut dès lors donner l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes sans être obligé de faire référence à une fonction en particulier :

Expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

## 2.4 Point de vue graphique

Il est moins aisé de représenter graphiquement une fonction de plusieurs variables qu'une fonction d'une seule variable. Une manière courante de le faire, notamment dans le cas de fonctions de deux variables d'espace, consiste à tracer des **courbes de niveau**. Nous allons prendre l'exemple des cartes de pression que l'on voit parfois lors des bulletins météo. En voici un exemple (carte météo France, voir page suivante). Les courbes tracées sont des **isobares** (la pression a la même valeur en tout point d'une isobare, la valeur est inscrite à cheval sur la courbe, en **hectopascals**). Cette carte donne une information sur le champ de pression en différents points de la Terre, **au niveau de la mer**. La pression est alors vue comme une fonction de deux variables d'espace qui correspondent aux coordonnées d'un point de la carte. Soit  $M$  un point de la carte de pression. On retient les propriétés suivantes :

- **il y a une unique isobare qui passe par  $M$**  (si deux isobares différentes se croisaient en  $M$ , cela signifierait que la pression a deux valeurs différentes en  $M$ , ce qui est évidemment absurde),
- **le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}P}$  est orthogonal à l'isobare au point  $M$** . En effet, quand on effectue un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  tangentiellement à l'isobare, la pression reste inchangée, par définition. Cela signifie que  $dP = 0 = \overrightarrow{\text{grad}P} \cdot d\vec{r} \iff d\vec{r} \perp \overrightarrow{\text{grad}P}$ . Au point  $M$ , la courbe isobare est donc perpendiculaire au vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}P}$ ,

- le vecteur  $\vec{\text{grad}}P$  est dirigé vers les pressions croissantes. En effet, si le déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  est colinéaire et de même sens que le gradient de pression :  $\vec{\text{grad}}P \cdot d\vec{r} > 0$  donc  $dP > 0$  (la pression augmente suite à ce déplacement élémentaire),
- plus les lignes de niveaux sont resserrées autour de M et plus la norme de  $\vec{\text{grad}}P$  est élevée au point M. En effet, le gradient jouant le rôle de dérivée spatiale, plus vite la pression varie quand on se déplace et plus  $\|\vec{\text{grad}}P\|$  est élevé.

À titre d'exemple, on a représenté par une flèche quelques vecteurs  $\vec{\text{grad}}P$  sur la carte de pression.

