Correction du DNS 10

EXERCICE 1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0$$

donc $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ et

$$\frac{2x}{1+x^2} - (-1) = \frac{2x + 1 + x^2}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} \geq 0$$

donc $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$. On a donc bien l'encadrement voulu.

On pouvait aussi étudier la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et vérifier qu'elle est à valeurs dans $[-1, 1]$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède, les deux membres de l'équation sont bien définis, et ils appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme la fonction sin est bijective sur cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x &\Leftrightarrow \sin \left(\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} \right) = \sin(\operatorname{Arctan} x) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x^2} = x(1+x^2) \\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow x \left(\sqrt{1+x^2} - 2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+x^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1+x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) On factorise le dénominateur : $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, puis on décompose en éléments simples : on sait qu'il existe des réels a et b tels que

$$(*) \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (*) par $x+1$ et en prenant $x = -1$, on obtient $a = 1$.

En multipliant les deux membres de l'égalité (*) par $x+2$ et en prenant $x = -2$, on obtient $b = -1$.

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = [\ln(x+1)]_0^1 - [\ln(x+2)]_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3.$$

2) On factorise le numérateur :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 9} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2} = \left[-\frac{1}{x+3} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

3) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x \, dx &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) dx \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \\ &= e - 2[x \ln x - x]_1^e \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

4) On intègre par parties puis on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{1+x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x)} dx \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln x - \ln(1+x)]_1^2 \\ &= \frac{5 \ln 2}{3} - \ln 3.\end{aligned}$$

5) On pose $y = \sqrt{x}$. Alors $x = y^2$ donc $dx = 2y dy$ et :

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 ye^y dy.$$

Ensuite on intègre par parties :

$$2 \int_1^2 ye^y dy = 2 \left([ye^y]_1^2 - \int_1^2 e^y dy \right) = 2(2e^2 - e - [e^y]_1^2) = 2e^2.$$

6) On reconnaît une forme uu' qui est la dérivée de $\frac{u^2}{2}$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan x \times \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

7) On effectue le changement de variable $y = \sqrt{x}$. Alors $x = y^2$, donc $dx = 2y dy$, et :

$$\int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2y}{y\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2[\text{Arcsin } y]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$