Devoir n°13 (non surveillé)

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, bijective (auquel cas on donnera sa réciproque). Calculer les images directes ou réciproques demandées.

1) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n\,//\,3 \end{array}$ où $n\,//\,3$ désigne le quotient dans la division euclidienne de n par 3. Déterminer $f(\{0, \dots, 10\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

2) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n\,\%\,3 \end{array}$ où $n\,\%\,3$ désigne le reste dans la division euclidienne de n par 3. Déterminer $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

3) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Déterminer $f(\{0, \dots, 10\})$, $f^{-1}(\{0, \dots, 10\})$ et $f(\mathbb{N})$.

4) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Déterminer $f(\{3,4\} \times \{1,2\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

5) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$. Déterminer $f(\{0\} \times \mathbb{R})$.

6) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y+z, z) \end{array}$. Déterminer $f(\{0,1\}^3)$.

7) $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer $\varphi^{-1}(\{\text{ch}\})$.

8) $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'+f \end{array}$ où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer $\varphi^{-1}(\{\text{ch}\})$.

Dans les questions suivantes, E et F sont des ensembles non vides fixés.

9) $f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathcal{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.

10) $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & A \cap B \end{array}$ où A est un sous-ensemble de E fixé. Déterminer $f^{-1}(\{A\})$ et $f^{-1}(\{\emptyset\})$.

11) $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & F \times F \\ (x,y) & \mapsto & (f(x), f(y)) \end{array}$ où f est une bijection de E dans F.

12) $\varphi : \begin{array}{rcl} F^E & \to & F^E \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$ où g est une bijection de E dans E.

13) $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$.