Correction du DNS 11

EXERCICE 1

1) On a

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u(x) = x^n$ et $v(x) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}$ pour tout $x \in [0,1]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$ pour tout $x \in [0,1]$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \\
&= \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{2n+3}{3}I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

et donc que

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.$$

3) On raisonne par récurrence.

On a vu que $I_0 = \dfrac{2}{3}$ et pour $n = 0$ on a $\dfrac{2^{2n+3}n!(n+2)!}{(2n+4)!} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$ également.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_n = \dfrac{2^{2n+3}n!(n+2)!}{(2n+4)!}$ et montrons que $I_{n+1} = \dfrac{2^{2n+5}(n+1)!(n+3)!}{(2n+6)!}$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+5}I_n \\
&= \frac{2(n+1)}{2n+5}\,\frac{2^{2n+3}n!(n+2)!}{(2n+4)!} \\
&= \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!} \\
&= \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!2(n+3)}{(2n+5)!(2n+6)} \\
&= \frac{2^{2n+5}(n+1)!(n+3)!}{(2n+6)!}.
\end{aligned}$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

EXERCICE 2

1) La solution générale de l'équation homogène $xy' - y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in\,]0, +\infty[,\ y(x) = \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre on utilise la méthode de variation de la constante (en posant $\psi(x) = x$ et $y = z\psi$) qui mène à

$$z'(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

On trouve une primitive en intégrant par parties :

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

La fonction y définie par $y(x) = -\ln x - 1$ est donc une solution particulière de l'équation.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in\,]0, +\infty[,\ y(x) = -\ln x - 1 + \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) La solution générale de l'équation homogène $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[,\ y(x) = \lambda e^{-\operatorname{Arcsin} x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On voit que la fonction constante $x \mapsto 1$ est une solution de l'équation avec second membre.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[,\ y(x) = 1 + \lambda e^{-\operatorname{Arcsin} x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) La solution générale de l'équation homogène $2x(1+x)y' + (1+x)y = 0$ est définie par

$$\forall\, x \in\,]0, +\infty[,\ y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre on utilise la méthode de variation de la constante (en posant $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $y = z\psi$) qui mène à

$$z'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

On trouve une primitive en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ (donc $x = t^2$ et $dx = 2t\,dt$) :

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t}{2t(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan} \sqrt{x}.$$

La fonction y définie par $y(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est donc une solution particulière de l'équation.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in\,]0, +\infty[,\ y(x) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

1) Pour tout $x \in I$ on a

$$y'(x) = z'(\sin x) \cos x \quad \text{et} \quad y''(x) = z''(\sin x) \cos^2 x - z'(\sin x) \sin x.$$

2) Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x) \tan x + y(x) \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow z''(\sin x) \cos^2 x - z'(\sin x) \sin x + z'(\sin x) \cos x \tan x + z(\sin x) \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(\sin x) \cos^2 x - z'(\sin x) \sin x + z'(\sin x) \sin x + z(\sin x) \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow (z''(\sin x) + z(\sin x)) \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(\sin x) + z(\sin x) = 0 \end{aligned}$$

car $\cos^2 x$ est non nul sur I.

La fonction y est donc solution de (E) sur I si et seulement la fonction z est solution de (E') : $z'' + z = 0$ sur $]-1, 1[$ (car sin définit une bijection de I dans $]-1, 1[$).

3) L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2 + 1 = 0$ et ses racines sont i et $-i$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[\,, z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par

$$\forall\, x \in I, y(x) = \alpha \cos(\sin x) + \beta \sin(\sin x)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.