

Corrigé DM3

Exercice 1 : Point glissant à l'intérieur d'une cuvette sphérique

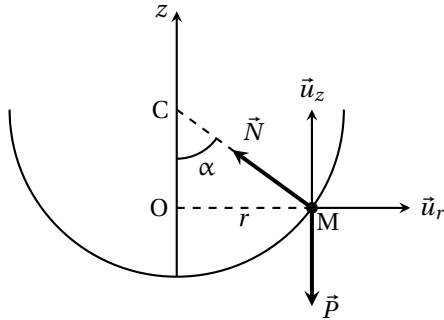
1. $r = R \sin \alpha$.

2. Le vecteur $\vec{u}_\theta$ doit s'éloigner de nous (symbole $\otimes$).

3. Le mouvement est circulaire de rayon $r = R \sin \alpha$ donc :

$$\vec{v} = R \sin \alpha \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R \sin \alpha \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \sin \alpha \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

4. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ (pas de frottement). On représente ces forces sur la figure 2 :



D'après le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$ avec $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et $\vec{N} = \|\vec{N}\| \cos \alpha \vec{u}_z - \|\vec{N}\| \sin \alpha \vec{u}_r$.

On projette dans la base cylindrique :

$$\begin{cases} -mR \sin \alpha \dot{\theta}^2 = -\|\vec{N}\| \sin \alpha & (1) \\ mR \sin \alpha \ddot{\theta} = 0 & (2) \\ 0 = -mg + \|\vec{N}\| \cos \alpha & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) donne $\ddot{\theta} = 0$. **Le mouvement circulaire est donc uniforme.**

5. L'équation (3) donne $\|\vec{N}\| = \frac{mg}{\cos \alpha}$.

6. L'équation (1) donne $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\|\vec{N}\|}{mR}} = \sqrt{\frac{g}{R \cos \alpha}}$. On en déduit que $v = R \sin \alpha \dot{\theta} = \sqrt{\frac{gR \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}$.

Exercice 2 : Saut d'un ressort

1. À l'équilibre la masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$ exercée par le ressort. On applique le principe fondamental de la statique à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

2. On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique dans le cas où la masse est en mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

avec désormais $\vec{F} = -k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$. On projette sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -mg - k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La pulsation propre vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

3. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, on montre que $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

4. La masse M est soumise à son poids $\vec{P}_1$, à la force de rappel élastique $\vec{F}_1 = k(x + \ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_x$ exercée par le ressort et à la réaction normale $\vec{N}_1 = N_1 \vec{u}_x$ du sol.

5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M . On suppose que la masse est encore posée sur le sol, son accélération est donc nulle :

$$\vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0}$$

On projette sur $\vec{u}_x$:

$$-Mg + k\left(x - \frac{mg}{k}\right) + N_1 = 0 \iff N_1 = -kx + (m + M)g$$

On remplace $x(t)$ par son expression :

$$N_1(t) = (m + M)g - \sqrt{km}v_0 \sin(\omega_0 t)$$

6. La masse décolle si la réaction $\vec{N}_1$ s'annule. D'après l'expression trouvée à la question précédente, $N_1(t)$ oscille entre $(m + M)g + \sqrt{km}v_0$ et $(m + M)g - \sqrt{km}v_0$. $N_1(t)$ ne s'annule qu'à la condition que :

$$(m + M)g - \sqrt{km}v_0 \leq 0 \iff v_0 \geq v_\ell = \frac{(m + M)g}{\sqrt{km}}$$

Exercice 3 : Alimentation d'une lampe avec un circuit RC

1. La tension aux bornes de la lampe est identique à celle aux bornes du condensateur. Juste avant d'avoir fermé l'interrupteur, celle-ci est nulle car le condensateur est déchargé. Juste après avoir fermé l'interrupteur, elle reste nulle par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Par conséquent, **la lampe est encore éteinte, juste après avoir fermé l'interrupteur.**

2. La lampe étant éteinte, le circuit étudié est un RC série soumis à un échelon montant de tension, comme vu en cours.

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

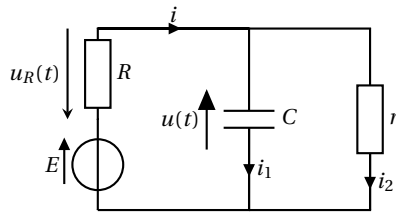
3. Voir cours pour la démo : $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.

4. La lampe s'allume si la tension u devient supérieure à E_a , or $u(t)$ tend vers l'asymptote E qui est supérieure à E_a . **Il y a donc forcément un moment où la lampe s'allumera.** Ce sera à la date t_0 telle que :

$$E(1 - e^{-t_0/\tau}) = E_a \iff t_0 = \tau \ln \frac{E}{E - E_a}$$

Voir fin de l'exercice pour le graphe.

5. Après allumage, le circuit équivalent est le suivant :



Pour établir l'équation différentielle on commence par écrire la loi des mailles :

$$E = u + u_R$$

Ensuite on "tire sur le fil" ; $i_1 = C \frac{du}{dt}$ puis $i_2 = \frac{u}{r}$. D'après la loi des noeuds, $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{r} + C \frac{du}{dt}$. Enfin, $u_R = Ri = \frac{R}{r} u + RC \frac{du}{dt}$. On conclut que :

$$E = (1 + \frac{R}{r})u + RC \frac{du}{dt} \iff \frac{du}{dt} + \frac{r+R}{RrC} u = \frac{E}{RC}$$

6. Pour $t > t_0$ on résout cette équation en commençant par déterminer la solution particulière :

$$u_p(t) = \frac{r}{r+R} E = E'$$

La solution générale de l'équation s'écrit : $u(t) = Ae^{-t/\tau'} + E'$. la condition initiale s'écrit :

$$u(t_0) = E_a \iff Ae^{-t_0/\tau'} + E' = E_a \iff A = (E_a - E')e^{t_0/\tau'}$$

On peut écrire l'expression complète de $u(t)$:

$$u(t) = E' + (E_a - E')e^{-(t-t_0)/\tau'}$$

7. La lampe s'éteint si la tension u devient inférieure à E_e , or $u(t)$ décroît et tend vers l'asymptote E' qui est inférieure à E_e . **Il y a donc forcément un moment où la lampe s'éteindra.** Ce sera à la date t_1 telle que

$$E' + (E_a - E')e^{-(t_1-t_0)/\tau'} = E_e \iff t_1 = t_0 + \tau' \ln \frac{E_a - E'}{E_e - E'}$$

8. Si lampe se rallume, on retrouve le circuit RC série étudié au début de l'exercice. On peut montrer que $u(t)$ a alors l'expression :

$$u(t) = E + (E_e - E)e^{-(t-t_1)/\tau}$$

la tension $u(t)$ atteint à nouveau la valeur E_a à la date t_2 telle que :

$$E + (E_e - E)e^{-(t_2-t_1)/\tau} = E_a \iff t_2 = t_1 + \tau \ln \frac{E - E_e}{E - E_a}$$

Par la suite la tension $u(t)$ répète la même oscillation, entre E_a et E_e . La période d'une oscillation est donc :

$$T = t_2 - t_0 = \tau \ln \frac{E - E_e}{E - E_a} + \tau' \ln \frac{E_a - E'}{E_e - E'}$$

9. $T = 0,95 \text{ s}$

