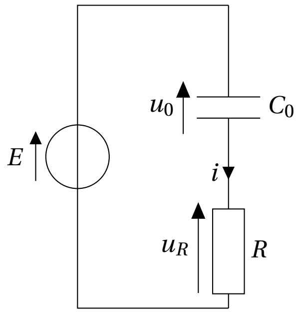
Corrigé DS3

Exercice 1 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

1. On obtient le schéma simplifié en enlevant la branche ouverte.
On applique la loi des mailles :

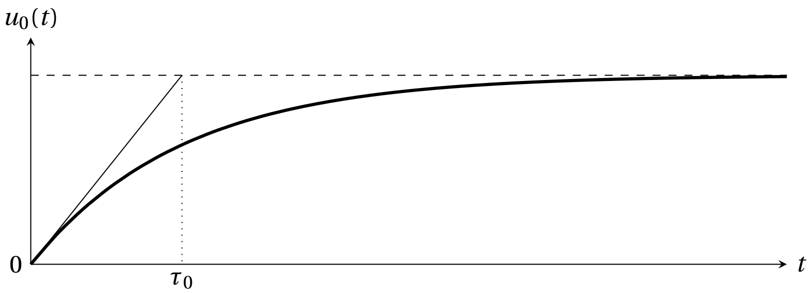


$$E = u_R + u_0 = Ri + u_0 = RC_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + u_0$$

On obtient finalement : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{u_0}{RC_0} = \frac{E}{RC_0}}$.

On identifie la constante de temps $\boxed{\tau_0 = RC_0 = 10\,\mu\mathrm{s}}$.

2. Solution pariculière : $u_{0,\mathrm{p}} = E$.
Solution générale de l'équation homogène : $u_{0,\mathrm{h}}(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau_0}$.
On en déduit que $u_0(t) = E + A\mathrm{e}^{-t/\tau_0}$. Avec la condition initiale $u_0(0^+) = 0$ (condensateurs initialement déchargés) on montre que $A = -E$ d'où $\boxed{u_0(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_0}\right)}$. On trace ci-dessous son allure :

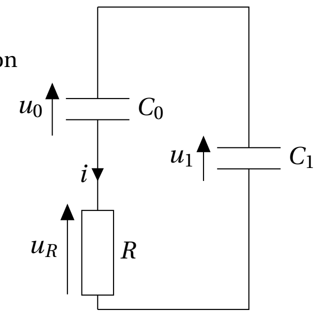


3. L'énergie reçue par le condensateur C_0 au cours de ce régime transitoire vaut :

$$E_0 = \mathscr{E}(\infty) - \mathscr{E}(0^+) = \frac{1}{2}C_0u_0^2(\infty) - \frac{1}{2}C_0u_0^2(0^+)$$

Sachant que $u_0(\infty) = E$ et $u_0(0^+) = 0$ on conclut que $\boxed{E_0 = \frac{1}{2}C_0E^2}$.

4. Les lois d'évolution pour les deux condensateurs s'écrivent (attention aux conventions!) :



$$i = C_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} = -C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

De cette relation on déduit que :

$$C_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_0u_0 + C_1u_1) = 0$$

La quantité $C_0u_0(t) + C_1u_1(t)$ se conserve au cours du temps.

À l'instant initial $t = 0^+$ on a $u_0(0^+) = E$ (le condensateur C_0 est chargé) et $u_1(0^+) = 0$ (le condensateur C_1 est toujours déchargé). On a donc :

$$\boxed{C_0u_0(t) + C_1u_1(t) = C_0E\ \forall t}$$

5. On applique la loi des mailles $u_0 + u_R = u_1$ avec :

$$u_R = Ri = RC_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

et, d'après le résultat de la question précédente :

$$u_1 = \frac{C_0(E - u_0)}{C_1}$$

En réinjectant ces expressions dans la loi des mailles on trouve que :

$$u_0 + RC_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} = \frac{C_0}{C_1}E - \frac{C_0}{C_1}u_0 \iff \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{u_0}{RC_0} = \frac{E}{RC_1} - \frac{u_0}{RC_1}$$

$$\iff \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{RC_0} + \frac{1}{RC_1}\right)u_0 = \frac{E}{RC_1}$$

$$\iff \boxed{\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{C_0 + C_1}{RC_0C_1}u_0 = \frac{E}{RC_1}}$$

6. En régime permanent de tension $u_0(\infty)$ constante le terme $\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}t$ est nul donc :

$$\frac{C_0 + C_1}{RC_0C_1}u_0(\infty) = \frac{E}{RC_1} \iff \boxed{u_0(\infty) = \frac{C_0}{C_0 + C_1}E}$$

On en déduit immédiatement $u_1(\infty)$:

$$u_1(\infty) = \frac{C_0(E - u_0(\infty))}{C_1} \iff \boxed{u_1(\infty) = \frac{C_0}{C_0 + C_1}E}$$

Remarque : on pouvait établir ce dernier résultat d'une autre manière. En régime permanent les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts donc $u_R(\infty) = Ri(\infty) = 0$. D'après la loi des mailles $u_1(\infty) = u_0(\infty)$.

7. L'énergie **fournie** par le condensateur C_0 vaut :

$$E_0' = \frac{1}{2}C_0u_0^2(0^+) - \frac{1}{2}C_0u_0^2(\infty) \iff \boxed{E_0' = \frac{1}{2}C_0\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2\right)E^2}$$

L'énergie **reçue** par le condensateur C_1 vaut :

$$E_1 = \frac{1}{2}C_1u_1^2(\infty) - \frac{1}{2}C_1u_1^2(0^+) \iff \boxed{E_1 = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2E^2}$$

L'énergie fournie par le condensateur C_0 est entièrement captée par le résistor et le condensateur C_1 :

$$E_0' = E_R + E_1 \iff E_R = E_0' - E_1 = \frac{1}{2}\left[C_0\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2\right) - C_1\left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2\right]E^2$$

On peut montrer que cette expression se simplifie en $\boxed{E_R = \frac{1}{2}\frac{C_0C_1}{C_0 + C_1}E^2}$.

8. Quand plusieurs condensateurs sont placés en dérivation **leurs capacités s'ajoutent** (voir ex 1 du TD 6).

$$C_1 = NC_0 \implies E_1 = \frac{1}{2} \times \frac{N}{(1+N)^2} C_0 E^2$$

On en déduit que $\boxed{r = \frac{E_1}{E_0} = \frac{N}{(1+N)^2} = 0{,}09}$.

Exercice 2 : La grêle

1. On applique le principe fondamental de la dynamique au grêlon dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottement celui-ci n'est soumis qu'à son poids :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

On projette sur $\vec{u}_z$: $\boxed{\ddot{z} = g}$ car l'axe (Oz) est **descendant**.

2. On intègre deux fois cette équation différentielle. Avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ (vitesse initiale nulle) et $z(0) = 0$ (l'origine marque la position initiale du grêlon) on trouve $\dot{z}(t) = gt$ et $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}gt^2}$.

3. À partir des résultats de la question précédente on trouve que :

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}} \implies \boxed{\dot{z} = \sqrt{2gz}}$$

4. La vitesse après un km de chute est de l'ordre de :

$$v\left[\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right] = \sqrt{2 \times 10 \times 10^3} = \sqrt{2} \times 10^2 \implies \boxed{v \sim 5 \cdot 10^2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

La vitesse du grêlon est de l'ordre de 500 km·h^{-1} après une chute d'un km. C'est beaucoup plus que ce qui est observé. Pour analyser la chute d'un grêlon **il n'est pas raisonnable de négliger les frottements**.

5. On applique le principe fondamental de la dynamique au grêlon dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Celui-ci est soumis à son poids et à la force de frottement de l'air :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{g} - \alpha v^2 \vec{u}_z$$

On projette sur $\vec{u}_z$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v^2 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v^2 = g}$$

6. La solution de vitesse constante vérifie :

$$\frac{\alpha}{m}v_{\text{lim}}^2 = g \iff \boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}}$$

7. On exprime le résultat précédent sous la forme d'un équation aux dimensions :

$$[v_{\text{lim}}] = \left[\frac{mg}{\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} \iff [\alpha] = \frac{[mg]}{[v_{\text{lim}}]^2} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L^2T^{-2}}} = \mathrm{ML^{-1}}$$

Le coefficient α s'exprime en $\boxed{\mathrm{kg\cdot m^{-1}}}$.

8. La simulation numérique prdit une vitesse limite $v_{\text{lim}} \simeq 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \simeq 140\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. L'estimation est plus cohérente qu'avec le modèle sans frottements.

On cherche la position pour laquelle le grêlon atteint la vitesse $v = 0{,}75 v_{\text{lim}} \simeq 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. D'après la figure 2 cela se produit à la date $t = 4\,\mathrm{s}$. À cet instant-là on lir sur l'autre graphique $\boxed{z(4\,\mathrm{s}) \simeq 75\,\mathrm{m}}$.

Exercice 3 : Mouvements de systèmes {masses + ressorts}

1. $\boxed{\vec{F}_\mathrm{g} = -k_\mathrm{g}(\ell_\mathrm{g} - \ell_0)\vec{u}_x}$ et $\boxed{\vec{F}_\mathrm{d} = k_\mathrm{d}(\ell_\mathrm{d} - \ell_0)\vec{u}_x}$.

2. $\boxed{\ell_\mathrm{g} = x}$ et $\boxed{\ell_\mathrm{d} = L - x}$.

3. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette directement sur $\vec{u}_x$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_\mathrm{g}(\ell_\mathrm{g} - \ell_0) + k_\mathrm{d}(\ell_\mathrm{d} - \ell_0) \\ &= -k_\mathrm{g}(x - \ell_0) + k_\mathrm{d}(L - x - \ell_0) \\ &= -(k_\mathrm{g} + k_\mathrm{d})x + k_\mathrm{g}\ell_0 + k_\mathrm{d}(L - \ell_0) \end{aligned}$$

On aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{k_\mathrm{g} + k_\mathrm{d}}{m}x = \frac{k_\mathrm{g}\ell_0 + k_\mathrm{d}(L - \ell_0)}{m}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_\mathrm{g} + k_\mathrm{d}}{m}}} \\ \omega_0^2 x_\mathrm{e} = \dfrac{k_\mathrm{g}\ell_0 + k_\mathrm{d}(L - \ell_0)}{m} \iff \boxed{x_\mathrm{e} = \dfrac{k_\mathrm{g}\ell_0 + k_\mathrm{d}(L - \ell_0)}{k_\mathrm{g} + k_\mathrm{d}}} \end{cases}$$

La raideur équivalente vaut $\boxed{K = k_\mathrm{g} + k_\mathrm{d}}$. L'abscisse x_e correspond à **la position d'équilibre de la masse**.

4. Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique. La solution générale s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_\mathrm{e}$$

avec $x(0) = A + x_\mathrm{e} = x_\mathrm{e} \iff A = 0$ et $\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0 \iff B = \frac{v_0}{\omega_0}$. $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

5. $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$ et $\boxed{X_m = \frac{v_0}{\omega_0}}$. AN : $X_m = 50\,\mathrm{cm}$ et $T_0 = 0{,}63\,\mathrm{s}$.

6. Les PFD appliqués à M_1 et M_2 donnent :

$$\begin{cases} -kx_1 + k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -k(x_2 - x_1) + k(L - x_2) = m\ddot{x}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 & (1) \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kL & (2) \end{cases}$$

7. On obtient les deux équations différentielles en effectuant (2) + (1) et (2) − (1).

8. On cherche à résoudre les deux équations ci-dessus, sous la forme :

$$S(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + L \ \text{ et } \ D(t) = C\cos(\omega_1 t) + D\sin(\omega_1 t) + \frac{L}{3}$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$. Les conditions initiales imposent $S(0) = L$, $\dot{S}(0) = 0$, $D(0) = \frac{L}{3} - 2a$ et $\dot{D}(0) = 0$. On en déduit que $A = B = D = 0$ et que $C = -2a$. Par conséquent :

$$\begin{cases} S(t) = x_1(t) + x_2(t) = L \\ D(t) = x_2(t) - x_1(t) = -2a\cos(\omega_1 t) + \frac{L}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{S(t)+D(t)}{2} = -a\cos(\omega_1 t) + \frac{2L}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1(t) = \frac{S(t)-D(t)}{2} = a\cos(\omega_1 t) + \frac{L}{3}}$$

Les masses ont des mouvements d'oscillations harmoniques à la pulsation ω_1. On constate que $x_1(t)$ est maximale quand $x_2(t)$ est minimale et inversement. Les deux mouvements s'effectuent en **opposition de phase**.

9. Le raisonnement est le même mais désormais les CI sont $S(0) = L+2a$, $\dot{S}(0) = 0$, $D(0) = \frac{L}{3}$ et $\dot{D}(0) = 0$. On en déduit que $B = C = D = 0$ et $A = 2a$. Par conséquent :

$$\begin{cases} S(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2a\cos(\omega_0 t) + L \\ D(t) = x_2(t) - x_1(t) = \frac{L}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{x_2(t) = a\cos(\omega_0 t) + \frac{2L}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1(t) = a\cos(\omega_0 t) + \frac{L}{3}}$$

Cette fois-ci, les oscillations harmoniques ont pour pulsation ω_0. Les deux masses oscillent **en phase**.