

Corrigé DS3

Exercice 1 : Fonctions spéciales

I. La fonction de W de Lambert

1. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel **un système isolé est au repos ou en mouvement de translation rectiligne uniforme**.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique au projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottements celui-ci n'est soumis qu'à son poids :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

On projette dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre deux fois successivement ces équations différentielles. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \cos(\theta_0)$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\theta_0)$, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = v_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\theta_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 \cos(\theta_0) t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0) t \end{cases}$$

La coordonnée x est nulle à tout instant, **le mouvement est contenu dans le plan (Oyz)** .

3. D'après les résultats précédents $t = \frac{y}{v_0 \cos(\theta_0)}$ ce qui permet d'obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$z(y) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} y^2 + \tan(\theta_0) y$$

La trajectoire est **parabolique** ; elle est **symétrique par rapport à l'axe vertical passant par son sommet**.

4. Le sommet S de la trajectoire est caractérisé par $\dot{z} = 0$, ce qui se produit à la date $t_S = v_0 \sin(\theta_0)/g$. On en déduit les coordonnées du sommet :

$$y_S = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g} ; \quad z_S = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

La portée du tir est la distance horizontale parcourue par le projectile avant que celui retombe sur le sol ($z = 0$). Cela se produit à la date $t = v_0 \sin(\theta_0)/g$ et :

$$\ell = y\left(t = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}\right) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

La portée est maximale lorsque $\sin(2\theta_0) = 1$, c'est-à-dire pour $\theta_0 = \pi/4$.

5. On écrit l'équation aux dimensions suivante :

$$[f] = [\alpha] \times [\nu] \iff [\alpha] = \frac{[f]}{[\nu]} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{LT}^{-1}} \iff [\alpha] = \text{MT}^{-1}$$

Le coefficient de frottement fluide α est homogène à une masse divisée par un temps. On peut donc construire un temps caractéristique τ de la manière suivante : $\tau = m/\alpha$.

À l'instant initial le vecteur vitesse est contenu dans le plan (Oyz) , le poids aussi et la force de frottement de l'air $\vec{f} = -\alpha \vec{v}_0$ également. On en déduit que l'accélération reste dans le plan (Oyz) et que **le mouvement sera toujours plan en présence de cette force de frottement**.

6. Dans cette question on notera $\vec{v} = v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$ le vecteur vitesse à un instant quelconque. On applique le principe fondamental de la dynamique au projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{g} - \alpha \vec{v}$$

On projette dans la base $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{cases} m \frac{dv_y}{dt} = -\alpha v_y \\ m \frac{dv_z}{dt} = -mg - \alpha v_z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y}{\tau} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = -g \end{cases}$$

On résout chacune de ces équations avec les conditions initiales $v_y(0) = v_0 \cos(\theta_0)$ et $v_z(0) = v_0 \sin(\theta_0)$. On obtient :

$$v_y(t) = v_0 \cos(\theta_0) e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad v_z(t) = (v_0 \sin(\theta_0) + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau$$

On intègre à nouveau ces équations pour obtenir les coordonnées de position du projectile. Avec les conditions initiales $y(0) = z(0) = 0$ on trouve finalement que :

$$\begin{cases} y(t) = \tau v_0 \cos(\theta_0) (1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = -g\tau t + \tau (v_0 \sin(\theta_0) + g\tau) (1 - e^{-t/\tau}) \end{cases}$$

7. Dans la situation $t \ll \tau$ on peut faire l'approximation $1 - e^{-t/\tau} \simeq \frac{t}{\tau}$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} y(t) \simeq v_0 \cos(\theta_0) t \\ z(t) \simeq v_0 \sin(\theta_0) t \end{cases}$$

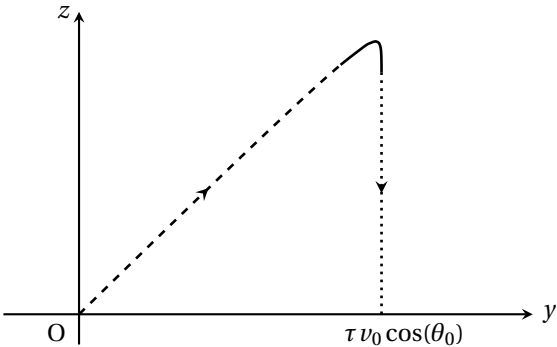
Le mouvement est quasiment **rectiligne uniforme, à la vitesse $\vec{v}_0$** .

8. Dans la situation $t \gg \tau$ on peut faire l'approximation $1 - e^{-t/\tau} \simeq 1$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} y(t) \simeq \tau v_0 \cos(\theta_0) \\ z(t) \simeq -g\tau t + \tau (v_0 \sin(\theta_0) + g\tau) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{y}(t) \simeq 0 \\ \dot{z}(t) \simeq -g\tau \end{cases}$$

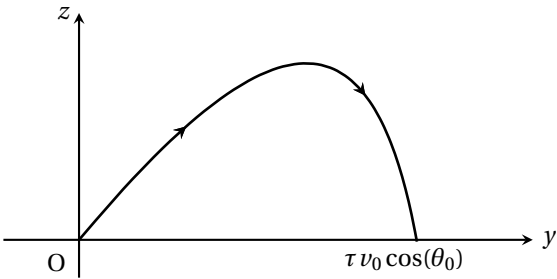
Le mouvement est quasiment **rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v} = -g\tau \vec{u}_z$ dans le plan $y = \tau v_0 \cos(\theta_0)$** . On identifie **une vitesse limite** $v_\infty = g\tau$. Si le temps de vol est très supérieur à τ alors le projectile retombe quasiment en $y = \tau v_0 \cos(\theta_0)$. Dans le cas contraire il retombe avant.

9. On trace une allure de trajectoire dans le cas où le temps de vol est grand devant τ .



- 1ère phase (traitillée) : mouvement quasi-rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0$.
- 2ème phase (trait plein) : variation du vecteur vitesse, la trajectoire est courbée.
- 3ème phase (pointillée) : mouvement quasi-rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = -v_\infty \vec{u}_z$.

10. Si le temps de vol est de l'ordre de τ alors le projectile retombe sur le sol avant d'atteindre sa vitesse limite $-v_\infty \vec{u}_z$.

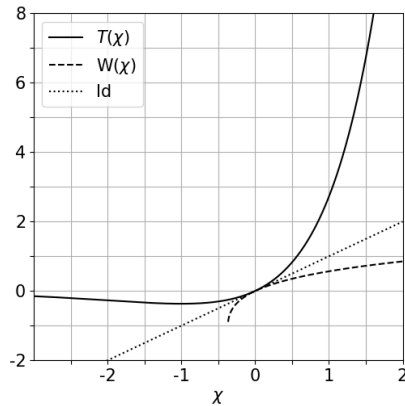


11. On dresse le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto \chi e^\chi$, en calculant d'abord sa dérivée : $T'(\chi) = (\chi + 1)e^\chi$.

χ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$T'(\chi)$	$+$	$\bigcirc$	$-$
T			

Le minimum global de cette fonction est situé en $\beta = -1$.

Deux fonctions réciproques l'une de l'autre ont des graphes **symétriques l'un de l'autre par rapport au graphe de la fonction identité** $\text{Id} : \chi \mapsto \chi$.



12. D'après le graphe de droite sur la figure 2 $W(0) = 0$. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{dW}{d\chi} = \frac{1}{\chi + \exp[W(\chi)]}$$

On utilise la méthode d'Euler explicite pour résoudre cette équation différentielle avec comme fonction à intégrer $f(W, \chi) = \frac{1}{\chi + \exp[W(\chi)]}$.

On écrit ci-dessous un script Python qui réalise cette opération et affiche ensuite le graphe de $W(\chi)$.

```
# Importation des bibliothèques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition des paramètres
h = 1E-4 # pas de discrétisation
W_0 = 0 # condition initiale
a, b = 0, 2.5 # bornes de l'intervalle de calcul

# Définition du tableau de sbascisses
chi = np.arange(a, b, h)

# Définition de la fonction à intégrer
def f(W, chi):
    return 1 / (chi + np.exp(W))

# Initialisation de la méthode d'Euler
W = [W_0]

# Calcul de la solution approchée par récurrence
for k in range(len(chi) - 1):
    W.append(W[k] + h * f(W[k], chi[k]))

# Créaction et affichage du graphe
plt.plot(chi, W)
plt.show()
```

13. Le projectile touche le sol à la date t^* telle que :

$$z(t^*) = -gt^* + \tau(v_0 \sin(\theta_0) + g\tau) \left(1 - e^{-t^*/\tau}\right) = 0 \iff t^* + u\tau - u\tau e^{-t^*/\tau} = 0$$

Avec les indications de l'énoncé on conclut que $t^* = \tau(-u + W(ue^u))$.

14. La portée est donnée par :

$$\ell = y(t^*) = \tau v_0 \cos(\theta_0) \left(1 - e^{-u} e^{-W(ue^u)}\right)$$

avec :

$$W(ue^u) e^{W(ue^u)} = ue^u \iff e^u e^{-W(ue^u)} = \frac{W(ue^u)}{u}$$

ce qui permet de conclure :

$$\ell = \tau v_0 \cos(\theta_0) \left(1 - \frac{W(ue^u)}{u}\right)$$

15. Avec les valeurs numériques proposées on évalue grossièrement :

$$v_\infty = \frac{mg}{\alpha} \simeq 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; \quad \gamma = \frac{v_0}{v_\infty} \simeq 2,5 ; \quad \gamma^2 - 1 \simeq 5 ; \quad \frac{\gamma^2 - 1}{e} \simeq 2$$

On lit sur le graphe de droite de la figure 2 $W(2) \simeq 0,85$. D'après l'expression fournie de $\theta_{\max}$ on propose comme estimation :

$$\theta_{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{2,5 \times 0,85}{5,2 - 0,85}\right) \simeq \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \implies \theta_{\max} \simeq 30^\circ$$

II. L'intégrale elliptique de première espèce

16. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse ponctuelle dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Celle-ci est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

On projette dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - \|\vec{T}\| \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

L'équation sur $\ddot{\theta}$ conduit à $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$.

17. Dans l'approximation des petits angles l'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$. Le pendule simple se comporte comme un **oscillateur harmonique** de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et de période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Cette période a la propriété remarquable **de ne pas dépendre de l'amplitude des oscillations** ; c'est la propriété **d'isochronisme** (qui n'est qu'approchée dans le cas d'un pendule simple).

18. On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et on intègre entre $t = 0$ et t quelconque :

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{\theta} \ddot{\theta} dt &= -\frac{g}{\ell} \int_0^t \dot{\theta} \sin \theta dt \iff \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right]_0^t = \frac{g}{\ell} [\cos \theta]_0^t \\ &\iff \frac{\dot{\theta}^2(t) - \dot{\theta}^2(0)}{2} = \frac{g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

Le pendule est lâché sans vitesse initiale donc $\dot{\theta}(0) = 0$. Dans la première partie du mouvement (première demi-oscillation) le pendule se déplace dans le sens des θ décroissants donc $\dot{\theta} < 0$:

$$\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Pour déterminer l'expression de la période des oscillations on s'intéresse uniquement au déplacement du pendule de sa position initiale θ_0 jusqu'à la verticale $\theta = 0$. Les symétries du problème nous permettent de dire que ce déplacement correspond à **un quart de période**.

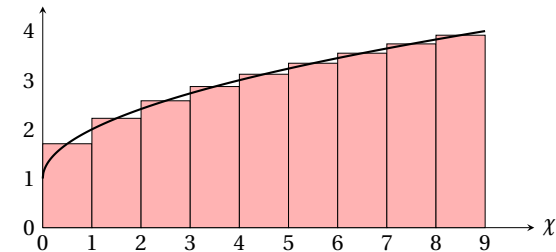
$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \int_{\theta_0}^0 \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{-\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

En inversant les bornes de l'intégrale et en réarrangeant les termes on obtient :

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \iff T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

La période des oscillations dépend de l'amplitude θ_0 des oscillations ; **il n'y a pas isochronisme du pendule simple en dehors de l'approximation linéaire**.

19. On illustre ci-dessous la méthode des rectangles médians sur l'exemple de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$.



Remarque : on peut montrer que la méthode des rectangles médians est **d'ordre 2** (comme la méthode des trapèzes). Cela signifie que si l'on double le nombre de rectangles (autrement dit on divise le pas de discrétisation par deux) alors **l'erreur est divisée par quatre**.

20. Notons $[a, b]$ l'intervalle d'intégration avec $a = 0$ et $b = \pi/2$. Si l'on subdivise $[a, b]$ en N sous-intervalles réguliers alors le pas de discrétisation est $h = (b - a)/N$. Avec la méthode des rectangles médians le centre de chaque rectangle est situé en $\chi_k = a + h \times \left(k + \frac{1}{2}\right)$, $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. L'aire de chaque rectangle est égale à $\mathcal{A}_k = h \times f(\chi_k)$ si bien que la valeur approchée de l'intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{X}}(\chi) = \sum_k (h \times f(\chi_k)) = h \sum_k f(\chi_k)$$

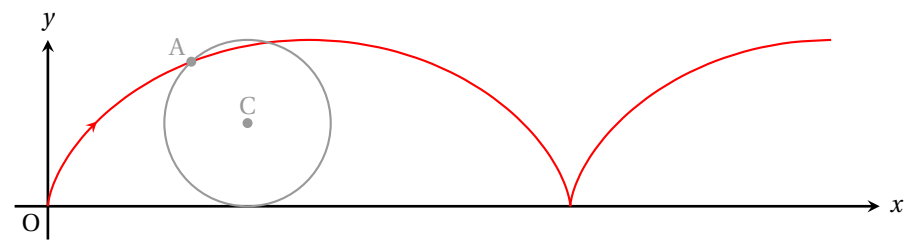
Au vu de la dernière ligne du code on comprend que la variable S désigne la somme $\sum_k f(\chi_k)$. On complète le code fourni :

```
import math as m
def f(x,phi):
    return 1/ m.sqrt(1 - x * m.sin(phi) ** 2)

S = 0.
N = 100
a = 0.
b = m.pi/2.
pas = (b - a) / N
theta_0 = m.pi/3.
x = m.sin(theta_0 / 2) ** 2
for i in range(N):
    phi = a + (i + 0.5) * pas
    S = S + f(x,phi)

print(pas * S)
```

21. On lit sur le graphe $T = 1,05\text{ s}$ pour une amplitude d'oscillations de 50° . Le décalage temporel est de 5% en comparaison de l'approximation des petits angles. Ramené à une durée d'une heure le décalage temporel serait de **3 minutes**.
22. Un point situé sur la circonférence d'une roue qui roule sans glisser sur une surface plane décrit une cycloïde dans le référentiel lié à la surface plane (voir figure ci-dessous).



Exercice 2 : Conversion d'un courant continu en courant alternatif

1. Les interrupteurs sont commandés de façon à ce que la tension aux bornes du dipôle rL soit égale à $\pm E_0$.

	K_1	K_2	K_3	K_4	$u_1(t)$
$0 < t < T_0/2$	fermé	ouvert	ouvert	fermé	E_0
$T_0/2 < t < T$	ouvert	fermé	fermé	ouvert	$-E_0$

2. L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est la suivante :

$$L \frac{di}{dt} + ri = u_1(t)$$

On en déduit son expression sur chaque demi-période :

$$L \frac{di}{dt} + ri = E_0 \quad \text{pour } 0 < t < T_0/2$$

$$L \frac{di}{dt} + ri = -E_0 \quad \text{pour } T_0/2 < t < T$$

3. La constante de temps du circuit vaut $\tau = \frac{L}{r}$. Par conséquent, on peut réécrire les deux propositions de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{r}{L} = 4f_0 \iff \frac{T_0}{2} = 2\tau \\ \frac{r}{L} = \frac{f_0}{4} \iff \frac{T_0}{2} = \frac{\tau}{8} \end{cases}$$

Pendant la durée d'une demi-période, la charge n'est pas complète mais elle est relativement avancée (environ 80% à 90%). Par conséquent, on en déduit que $\frac{T_0}{2}$ est supérieur à τ . La proposition cohérente est donc $\frac{T_0}{2} = 2\tau \iff \frac{r}{L} = 4f_0$.

4. On détermine la solution de l'équation différentielle pour la demi-période $0 < t < T_0/2$. D'après le graphe, la condition initiale s'écrit $i(0^+) = -i_{\max}$. La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme :

$$i(0 < t < T_0/2) = A \exp\left(-\frac{rt}{L}\right) + \frac{E_0}{r}$$

La condition initiale impose la solution suivante :

$$i(0 < t < T_0/2) = \left(-i_{\max} - \frac{E_0}{r}\right) \exp\left(-\frac{rt}{L}\right) + \frac{E_0}{r}$$

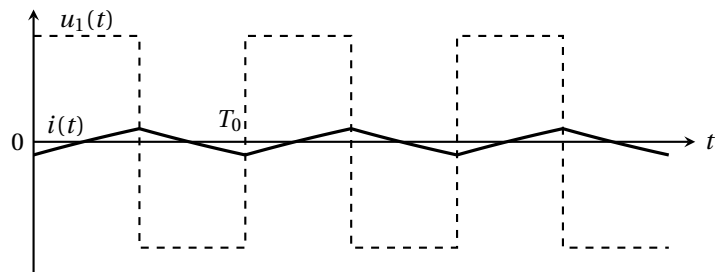
5. D'après l'énoncé, le courant oscille entre $\pm i_{\max}$, ce qui signifie que :

$$i\left(\frac{T_0}{2}\right) = i_{\max} \iff \frac{E_0}{r} + \alpha \left(-i_{\max} - \frac{E_0}{r}\right) = i_{\max}$$

Après simplification, on obtient l'expression du courant maximal :

$$i_{\max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{E_0}{r}$$

6. Comme on l'a fait à la question 3, on écrit : $\frac{r}{L} \ll f_0 \iff \tau \gg T_0$. Dans ce cas, le régime transitoire a à peine le temps de commencer sur la durée d'une demi-période. Par conséquent, $i(t)$ aura l'allure d'une succession de début de charges et de décharges, ce qui correspond à un **signal triangulaire de faible amplitude**.



Si $\frac{r}{L} \gg f_0$ alors $\tau \ll T_0$. Dans ce cas, le régime transitoire est quasi-terminé à la fin de la demi-période demi-période. Par conséquent, $i(t)$ aura une allure semblable à $u_1(t)$, c'est-à-dire **une allure rectangulaire**.

