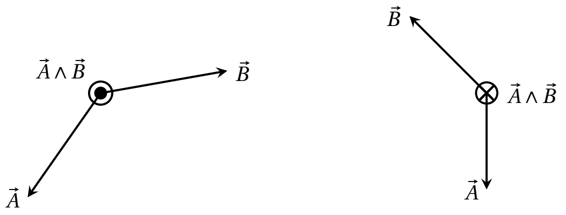
Produit vectoriel

1 Définition

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques de dimension 3. Le produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$ est un **vecteur** défini par les propriétés suivantes :

- **direction** : $\vec{A}\wedge\vec{B}$ est dirigé **perpendiculairement au plan** $(\vec{A},\vec{B})$.
- **sens** : le sens de $\vec{A}\wedge\vec{B}$ est donné par **la règle des trois doigts de la main droite**.
- **norme** : $\left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|\cdot\left\|\vec{B}\right\|\cdot\left|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})\right|$



2 Propriétés du produit vectoriel

- Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires alors $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$,
- **linéarité** : pour tous vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ de dimension 3 :

$$(\vec{A}+\vec{B})\wedge\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{C}+\vec{B}\wedge\vec{C},$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C},$$

- **distributivité** : $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de dimension 3 :

$$(\alpha\vec{A})\wedge\vec{B} = \alpha(\vec{A}\wedge\vec{B}),$$

$$\vec{A}\wedge(\alpha\vec{B}) = \alpha(\vec{A}\wedge\vec{B}),$$

- **antisymétrie** : pour tous vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de dimension 3 :

$$\vec{B}\wedge\vec{A} = -\vec{A}\wedge\vec{B}.$$

3 Calcul des coordonnées d'un produit vectoriel

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs quelconques de dimension 3 et soient (A_1,A_2,A_3) et (B_1,B_2,B_3) leurs coordonnées respectives dans une base orthonormée quelconque $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)$ de l'espace. Les trois composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}$ dans la base $(\mathscr{B})$ se calculent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{A} & & \overrightarrow{B} & & \overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B} \\ \left|\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\right. & \wedge & \left|\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array}\right. & = & \left|\begin{array}{c} A_2B_3-A_3B_2 \\ A_3B_1-A_1B_3 \\ A_1B_2-A_2B_1 \end{array}\right. \end{array}$$

Pour se souvenir facilement de cette formule, on utilise couramment la règle des gamma, schématisée ci-dessous :

Pour calculer la composante du produit vectoriel suivant $\overrightarrow{u_1}$, on raye la ligne 1 et on utilise un **gamma** pour calculer la composante à partir des lignes 2 et 3.

$$\left|\begin{array}{c} \cancel{A_1} \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} \cancel{B_1} \\ B_2 \\ B_3 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} A_2B_3-A_3B_2 \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Pour calculer la composante du produit vectoriel suivant $\overrightarrow{u_2}$, on raye la ligne 2 et on utilise un **gamma** pour calculer la composante à partir des lignes 3 et 1 (qu'on aura recopié en-dessous de la ligne 3).

$$\left|\begin{array}{c} A_1 \\ \cancel{A_2} \\ A_3 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} B_1 \\ \cancel{B_2} \\ B_3 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} \\ A_3B_1-A_1B_3 \\ \\ \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \end{array}$$

Pour calculer la composante du produit vectoriel suivant $\overrightarrow{u_3}$, on raye la ligne 3 et on utilise un **gamma** pour calculer la composante à partir des lignes 1 et 2.

$$\left|\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cancel{A_3} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \cancel{B_3} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} \\ \\ A_1B_2-A_2B_1 \end{array}\right.$$