Chapitre 12 : Signaux, ondes

1 Nature d'un signal physique

1.1 Notion d'onde

Une **onde** est une propagation d'information dans l'espace et le temps sans déplacement, en moyenne, de matière.

On appelle **signal** toute grandeur physique qui varie au cours du passage d'une onde.

1.2 Quelques exemples

Une information peut se propager avec différents supports. Suivant les cas, on distingue plusieurs catégories d'ondes :

On appelle onde mécanique la propagation d'une déformation au sein d'un milieu matériel. C'est le cas des ondes sismiques, des ondes acoustiques, des vagues, etc... Les ondes acoustiques, en particulier, correspondent à la propagation d'une surpression du milieu matériel (qui peut être solide, liquide ou gazeux).

Une information peut également se propager par voie électrique. Dans ce cas, la propagation s'effectue via l'oscillation de particules chargées électriquement et les grandeurs généralement mesurées pour détecter le passage de l'onde sont des tensions ou des courants électriques.

Les ondes électromagnétiques (EM) correspondent à la propagation d'un champ électrique et magnétique dans l'espace. Contrairement aux deux types d'ondes précédentes, les ondes EM n'ont pas besoin d'un milieu matériel pour se propager. Rayons X, rayons UV, lumière visible, infrarouges ou ondes radio sont différents exemples d'ondes EM, que l'on distingue suivant la valeur de leur fréquence.

1.3 Onde transversale, longitudinale

Une onde mécanique se propage dans un milieu matériel. Lors du passage de l'onde, les constituants du milieu se mettent à osciller autour de leur position d'équilibre.

Lorsque la vitesse de déplacement des constituants du milieu est *colinéaire* à la direction de propagation de l'onde, on dit que l'onde est **longitudinale** (onde acoustique, onde sismique primaire, etc).

Lorsque la vitesse de déplacement des constituants du milieu est orthogonale à la direction de propagation de l'onde, on dit que l'onde est **transversale** (ou transverse) (onde le long d'une corde, vague, onde sismique secondaire, etc).

2 Onde progressive dans un milieu illimité, non dispersif et transparent

2.1 Introduction

Def : Une onde est dite **progressive** lorsque la propagation s'accompagne d'un **transport d'énergie** dans l'espace.

La direction de propagation de l'onde s'assimile à la direction dans laquelle se propage cette énergie. Dans cette partie, nous aborderons la propagation dans le cas le plus simple, celui d'un milieu :

- **illimité** : nous ne tiendrons pas compte des effets dûs à la taille finie du milieu,
- **transparent** : le milieu n'absorbe pas l'énergie transportée par l'onde,
- **non dispersif** : le comportement du milieu, vis-à-vis de la propagation d'une onde sinusoïdale , ne dépend pas de sa fréquence. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion au cours de ce chapitre.

Sous ces hypothèses, la propagation d'une onde vérifie la propriété suivante :

Dans un milieu illimité, non dispersif et transparent, une onde garde la même "forme" à tout instant. Entre deux dates, la propagation se traduit simplement par une **translation** du signal, sans déformation.

La vitesse de propagation de l'onde est appelée **célérité** (notée c).

2.2 Expression mathématique d'une onde progressive de forme quelconque

2.2.1 Propagation dans le sens des x croissants

On considère une onde progressive qui se propage selon un axe (Ox), dans le sens des x croissants. Mathématiquement, on peut caractériser une onde progressive qui se propage avec une célérité c , dans le sens des x croissants, par une fonction du type :

$$s(x,t) = f(x - ct) \quad \text{ou} \quad s(x,t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

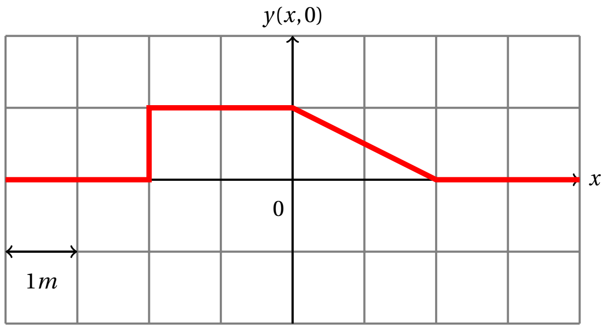
Ces deux écritures sont équivalentes. La première est plus adaptée au tracé de la forme de l'onde à un instant t donné. La seconde est plus adaptée au tracé de la vibration d'un point de l'axe au cours du temps.

2.2.2 Propagation dans le sens des x décroissants

On considère une onde progressive qui se propage dans la direction $(\mathrm{O}x)$, dans le sens des x décroissants. Le signal transmis par cette onde peut s'écrire sous l'une de ces deux formes :

$$s(x,t) = f(x+ct) \quad \text{ou} \quad s(x,t) = g\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

2.3 Evolution spatiale et temporelle d'une onde progressive



Le graphe ci-dessus représente, à la date $t=0$, la forme d'une onde progressive se propageant le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$ dans le sens des x croissants avec une célérité $c = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1. Tracer la forme de l'onde aux dates $t = 1\,\mathrm{s}$ et $t = 3\,\mathrm{s}$.
2. Tracer l'allure de la déformation subie par le point d'abscisse $x = 1\,\mathrm{m}$ au cours du temps.

3 Onde progressive harmonique

3.1 Définition

Losqu'une onde progressive a une forme **sinusoïdale**, on dit qu'elle est **harmonique** :

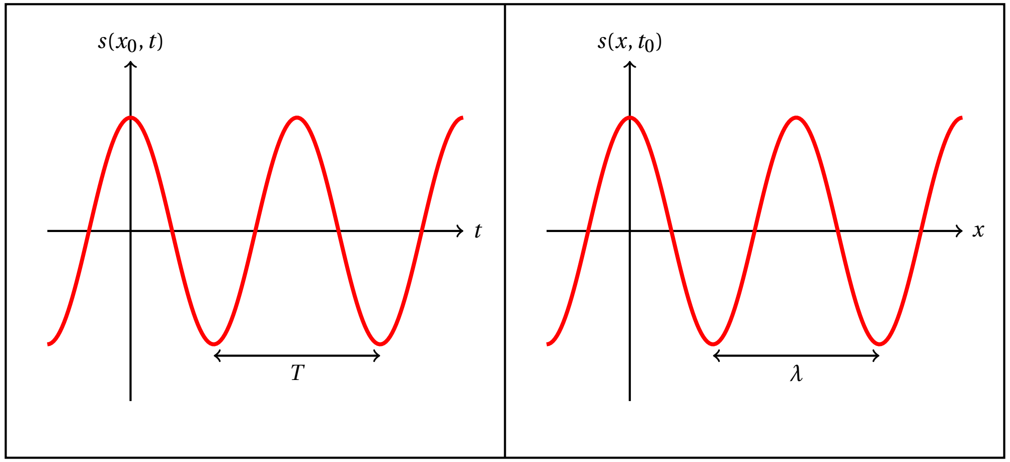
$$\begin{cases} s(x,t) = S_0\cos\left(\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)+\varphi\right) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ s(x,t) = S_0\cos\left(\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)+\varphi\right) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}$$

L'état vibratoire de l'onde, pour x et t donnés, est caractérisé par la valeur de sa **phase** :

$$\boxed{\phi(x,t) = \omega t \pm \frac{\omega}{c}x + \varphi}$$

3.2 Double périodicité spatiale et temporelle

Cette fonction présente une périodicité par rapport à la variable t : en un point d'abscisse x, l'onde varie sinusoïdalement dans le temps, avec une période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.



Elle présente également une périodicité par rapport à la variable d'espace x. Si l'on prend une photo de l'onde à la date t, elle aura dans l'espace l'allure d'une d'une sinusoïde.

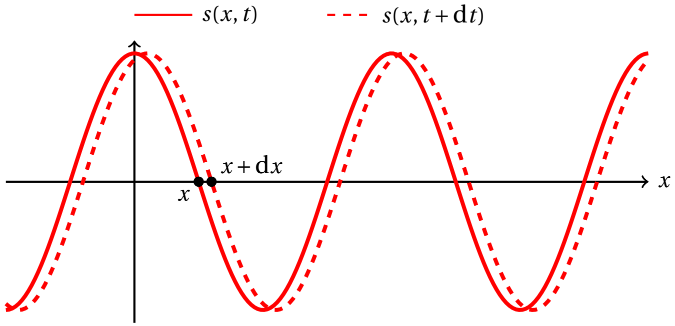
La **longueur d'onde** λ est la période spatiale d'une onde progressive harmonique.

3.3 Vitesse de phase

3.3.1 Définition

Def : La **vitesse de phase** (notée v_ϕ) est la vitesse à laquelle se propage la phase d'une onde.

Considérons une onde progressive harmonique de pulsation ω qui se propage le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$ dans le sens des x croissants. On illustre la notion de vitesse de phase sur le graphe ci-dessous.



On a tracé l'allure de l'onde à deux dates infiniment proches t et $t+\mathrm{d}t$. On a représenté par un point noir deux points où l'onde est dans le même état de phase à t et $t+\mathrm{d}t$. La vitesse de phase est la vitesse de déplacement de ce point, c'est-à-dire la vitesse de déplacement d'un point de l'axe qui conserve la même phase. On constate qu'elle s'identifie ici à la célérité de l'onde. En effet, le calcul de la vitesse de phase conduit à :

$$\boxed{v_\phi = c}$$

3.3.2 Différence entre vitesse de phase et célérité

- le terme "célérité" est employé uniquement dans les situations où **l'onde ne se déforme pas** au cours de sa propagation. C'est notamment le cas dans les milieux non dispersifs. Comme nous le verrons plus tard, c'est également le cas des ondes progressives harmoniques dans les milieux dispersifs. Dans ce cas, la vitesse de phase s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie et on appelle cette vitesse de propagation commune la célérité de l'onde.
- le terme "vitesse de phase" est plus général et s'applique également à des situations où l'onde se déforme au cours de la propagation. Dans ce cas, la vitesse de phase n'est pas forcément la vitesse de propagation de l'énergie.

En conclusion, dans toutes les situations où nous l'emploieront cette année, **la célérité s'identifiera toujours à la vitesse de phase**.

3.3.3 Relation entre la fréquence d'une onde progressive harmonique et sa longueur d'onde

À partir des résultats précédents, on montre que longueur d'onde dépend de la fréquence suivant la relation :

$$\boxed{\lambda = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{f}}$$

3.4 Vecteur d'onde

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation d'une onde progressive harmonique. On définit le **vecteur d'onde** associé à cette onde progressive de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{u} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}}$$

k représente la pulsation spatiale de l'onde progressive harmonique.

Rq : La définition du vecteur d'onde conduit à la relation suivante :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Cette relation est valable dans tous les milieux (dispersifs ou non dispersifs) et permet de calculer la vitesse de phase.

Avec le vecteur d'onde, on peut réécrire sous une forme différente l'expression d'une onde progressive harmonique :

$$\boxed{\begin{cases} s(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx + \varphi) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ s(x,t) = S_0\cos(\omega t + kx + \varphi) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}}$$

3.5 Déphasage entre deux points de l'espace

Pour étudier la vibration de l'onde en un point d'abscisse x fixé, on peut écrire le signal sous la forme :

$$s(x,t) = S_0\cos(\omega t + \varphi(x)) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \pm kx + \varphi$$

Tous les points de l'axe (Ox) vibrent de manière synchrone, à la pulsation ω, mais avec une phase à l'origine qui dépend de la position x. Par conséquent, entre deux points A et B distants de Δx, il apparaît un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Où $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ est le retard dû à la propagation entre A et B.

3.6 Milieu dispersif

3.6.1 Définition

Def : Un milieu de propagation est **dispersif** si la vitesse de phase dépend de la fréquence.

Illustrons sur un exemple déjà vu cette année, la propagation des ondes lumineuses dans un MHTI. Dans un milieu dispersif, la vitesse de phase d'une onde lumineuse monochromatique (c'est-à-dire harmonique ou encore sinusoïdale) dépend de sa fréquence (autrement dit de la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c/f$ où c est la célérité de la lumière dans le vide). Or on rappelle que l'indice de réfraction est défini par :

$$n = \frac{c}{v_\phi}$$

où c est encore la célérité de la lumière dans le vide et v_ϕ la vitesse de phase dans le milieu. Par conséquent, on en déduit qu' **un MHTI est dispersif si son indice de réfraction dépend de la longueur d'onde dans le vide**. On retrouve la définition des milieux dispersifs vue dans le cours d'optique.

3.6.2 Déformation d'une onde dans un milieu dispersif

Une onde progressive périodique de forme quelconque peut être caractérisée mathématiquement comme une superposition d'ondes progressives harmoniques de fréquences différentes (voir partie suivante sur le spectre d'une onde périodique).

> Dans un milieu dispersif, une onde progressive non harmonique se déforme au cours de sa propagation car elle contient plusieurs composantes harmoniques de fréquences différentes qui se propagent avec des vitesses de phase différentes.

Rq : Une onde progressive harmonique, qui ne contient par définition "qu'une seule fréquence", ne se déforme pas au cours de la propagation.

Voici quelques exemples de propagation dispersives et non dispersives :

- propagation non dispersive : onde électromagnétique dans le vide, onde acoustique dans l'air (bonne approximation), vibration d'une corde de guitare (bonne approximation), vague dans un bassin plat et peu profond (bonne approximation).
- propagation dispersive : onde lumineuse dans du verre, onde électromagnétique dans un plasma peu dense, vague en milieu profond, onde électrique dans un câble résistif, onde de matière associée à une particule non relativiste (mécanique quantique).

4 Spectre d'un signal périodique

4.1 Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique

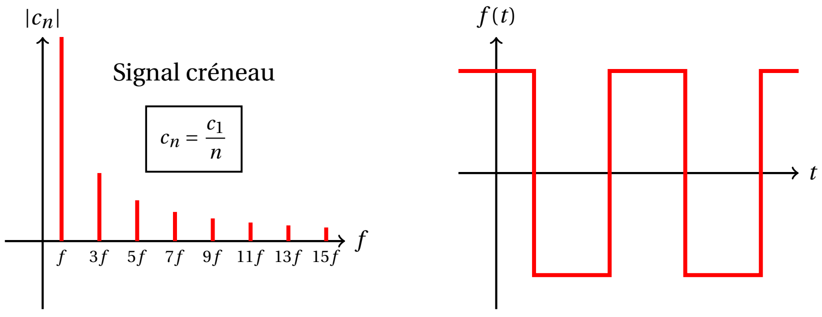
En général, une onde n'est pas harmonique mais a une forme quelconque. Cependant, une propriété mathématique particulière des fonctions périodiques permet de ramener l'étude de n'importe quel signal périodique à celui d'un signal harmonique. Cette propriété, connue sous le nom de **décomposition en série de Fourier**, a une importance capitale dans l'analyse des signaux en physique.

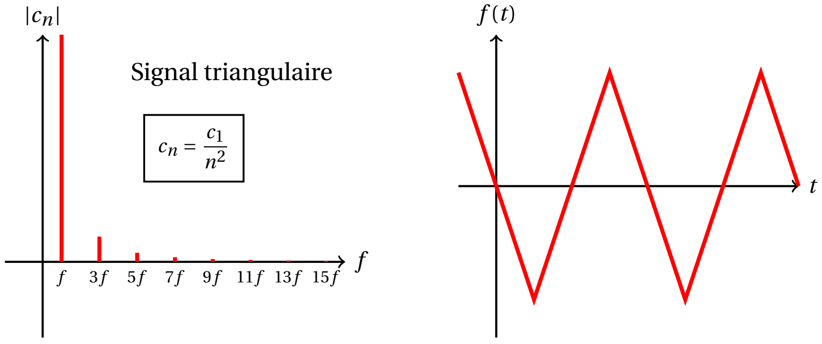
> Toute fonction périodique $s(t)$ de fréquence f peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales de fréquences proportionnelles à f (appelée **série de Fourier**) :
>
> $$\boxed{s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)}$$
>
> c_0 est appelée la **composante continue**. Elle est égale à la valeur moyenne de la fonction $s(t)$.
>
> Le premier terme de la somme s'appelle le **fondamental**. Sa fréquence vaut f.
>
> Tous les autres termes s'appellent les **harmoniques**. Ils ont des fréquences égales à des multiples entiers de la fréquence fondamentale : $f, 2f, 3f, \ldots$
>
> Les coefficients c_n sont réels et sont caractéristiques de la fonction $s(t)$. Pour une fonction périodique $s(t)$ donnée, il existe une unique décomposition en série de Fourier.

4.2 Spectre d'un signal périodique

> **On appelle spectre d'un signal le contenu en fréquence de sa décomposition en série de Fourier**.

En général, on représente sur un **spectre en amplitude** le "poids" des différentes composantes spectrales, c'est-à-dire la valeur absolue des coefficients c_n. C'est pourquoi le plus souvent, on représente le spectre d'un signal par un graphique du type $(f, |c_n|)$:





Un signal est associé **à un unique spectre** et inversement. A cause de cette unicité du spectre, on peut dire qu'il y a équivalence entre un signal $s(t)$ et son spectre associé. L'un donne une vision **temporelle** et l'autre **fréquentielle** du même signal.

> Un signal périodique quelconque peut être interprété comme une somme de sinusoïdes. Le spectre permet de visualiser les différentes composantes fréquentielles et leurs poids respectifs dans la décomposition.

4.3 Ordres de grandeur de fréquences

Nature	Fréquence
La_3 (acoustique)	440 Hz
domaine audible (acoustique)	20 Hz ↔ 20 kHz
courant EDF (électrique)	50 Hz
bande FM (EM)	80 MHz ↔ 110 MHz
Téléphonie mobile (EM)	880 MHz ↔ 960 MHz
four micro-onde (EM)	2450 MHz

5 Onde stationnaire

5.1 Réflexion d'une onde progressive sur une paroi rigide

Lorsqu'une onde progressive incindente $s_i(x,t)$ atteint une paroi rigide d'abscisse $x = 0$, elle donne naissance à une onde **réfléchie** :

$$s_r(x,t) = -s_i(-x,t)$$

L'onde réfléchie se propage en sens opposé à l'onde incidente. A t donné, on construit l'onde réfléchie à partir de l'onde incidente par symétrie centrale par rapport au point fixe de la paroi. L'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

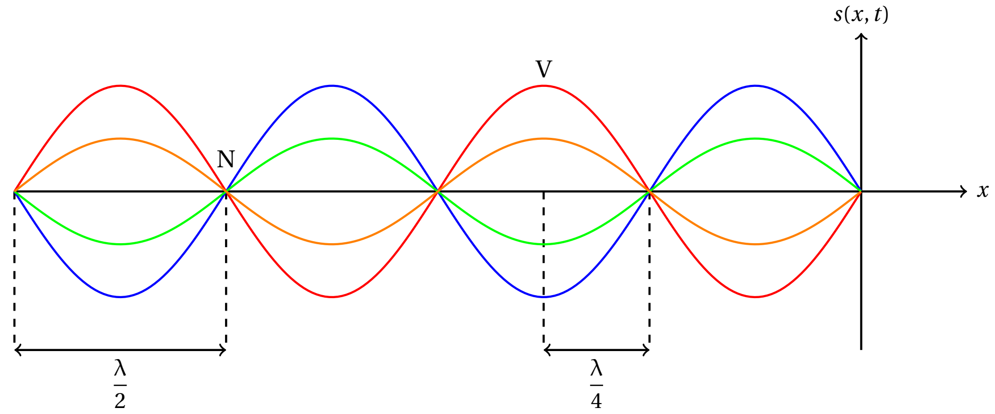
5.2 Cas d'une onde progressive harmonique, onde stationnaire

La réflexion d'une onde progressive harmonique sur une paroi donne naissance, dans le milieu de propagation, à une **onde stationnaire** (OS) de la forme :

$$s(x,t) = 2S_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \psi\right)$$

Une onde stationnaire présente la particularité de posséder :

- des **noeuds** de vibration, c'est-à-dire des points de l'espace immobiles à tout instant. Deux noeuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$.
- des **ventres** de vibrations, c'est-à-dire des points de l'espace qui oscillent avec une amplitude maximale (ici $2S_0$). Deux ventres consécutifs sont distants de $\lambda/2$. Un ventre et un noeud consécutifs sont distants de $\lambda/4$.



5.3 Mouvement d'une corde entre deux extrémités fixes

Lorsqu'une onde apparait sur une corde de longueur L fixée au niveau de ses deux extrémités (d'abscisses $x = 0$ et $x = L$ par exemple), elle subit des réflexions multiples sur chaque extrémité. On peut montrer que l'onde résultante est encore une onde stationnaire, telle qu'on l'a vue dans le paragraphe précédent.

L'OS résultante doit vérifier cette fois deux conditions aux limites : $s(0,t) = 0\ \forall t$ et $s(L,t) = 0\ \forall t$. Il en résulte que la longueur d'onde de l'OS doit nécessairement vérifier la relation suivante :

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

On dit que les longueurs d'onde sont **quantifiées**. La quasi-totalité des valeurs de λ sont interdites : seul un nombre discret de λ, celles vérifiant l'équation ci-dessus, sont possibles sur la corde. Il en va de même pour les fréquences, qui prennent uniquement les valeurs suivantes :

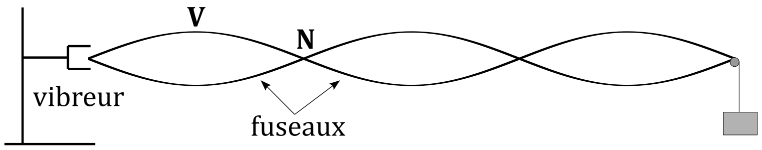
$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}$$

Chaque valeur de n constitue un **mode propre** de vibration, associée à une fréquence f_n et une longueur d'onde λ_n.

- Le mode $n = 1$ est appelé le **fondamental**. La fréquence $f_1 = \dfrac{c}{2L}$ est appelée fréquence fondamentale.
- Les modes $n > 1$ sont appelés les **harmoniques** de rang n. On remarque que $f_n = nf_1$: les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale.

5.4 Mise en évidence expérimentale des modes propres : corde de Melde

L'expérience de la corde de Melde consiste à faire vibrer l'une des extrémités d'une corde tendue de manière sinusoïdale pour imposer dans la corde une onde à la fréquence de l'excitateur.



Les vibrations de la corde sont quasi-nulles, sauf lorsque la fréquence est celle d'un mode propre. On voit alors apparaître des fuseaux, caractéristiques de l'apparition d'une onde stationnaire dans le système. Plus la fréquence augmente et plus le nombre de fuseaux augmente (normal car λ diminue lorsque f augmente).

5.5 Vibration quelconque entre deux extrémités fixes

Lorsqu'on fait vibrer une corde fixée en ses extrémités de manière quelconque, on peut montrer que l'onde résultante est une combinaison linéaire de tous les modes propres (il y en a le plus souvent une infinité) :

$$s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x + \psi_n)$$

Où les coefficients S_n , amplitudes associées à chaque harmonique, sont caractéristiques du signal $s(x,t)$.

Par analogie avec les ondes progressives, on peut définir le spectre d'une onde stationnaire à partir des différentes fréquences qui le composent et de leur poids respectif, quantifié par la valeur $|S_n|$.

Le son d'un instrument de musique est beaucoup plus complexe qu'une simple sinusoïde. Il est caractérisé à la fois par sa **note** (la fréquence fondamentale) et par son **timbre** (la richesse et l'intensité des harmoniques). La même note, jouée par deux instruments différents, produits des sensations très différentes chez l'auditeur. Par exemple, le diapason est un instrument de musique qui produit des notes très pures, dont les harmoniques sont quasiment absents.

5.6 Onde stationnaire acoustique dans une cavité

On peut obtenir des ondes stationnaires acoustiques en confinant une onde acoustique dans un espace clos. Pour simplifier l'étude, on se place dans une conduite cylindrique close à ses deux extrémités (instrument de type flûte). On se restreint à une propagation en une dimension. Une paroi rigide constitue pour l'onde stationnaire acoustique un **ventre de surpression**.

De même, si l'on ouvre l'une des extrémités du tube sur l'extérieur, on peut montrer que si le diamètre d de l'ouverture est tel que $d \ll \lambda$, alors l'extrémité libre constitue pour l'OS un **noeud de surpression**.