Devoir n°14 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

$$A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C.$$

On n'utilisera pas les fonctions indicatrices. Les réponses non rédigées rigoureusement ne seront pas lues.

EXERCICE 2

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective et que f est surjective, alors g est injective.

EXERCICE 3 - Suites homographiques

1) Soient a, b, c, d quatre réels, avec c non nul. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a) Étudier les variations de f. On discutera selon le signe de $ad-bc$. On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Montrer que f admet au plus deux points fixes (un point fixe de f est un réel x tel que $f(x) = x$).

2) On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie par $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$.

a) Montrer que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$. En déduire que $u_n \in [1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que f a deux points fixes x_1 et x_2 que l'on déterminera (on prendra $x_1 < x_2$).

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - x_1}{u_n - x_2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$.

a) Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f. En déduire que $u_n \in [1, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que f a un unique point fixe x_0.

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, on pourra introduire la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - x_0}$, et montrer que cette suite est arithmétique.