Correction du DNS 13

1) On a $f(0) = f(1) = 0$ donc f n'est pas injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = f(3n)$ donc f est surjective.

Enfin, $f(\{0, \dots, 10\}) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1, 2\}$.

2) On a $f(0) = f(3) = 0$ donc f n'est pas injective.

L'application f est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ donc elle n'est pas surjective (seuls 0, 1 et 2 ont des antécédents par f).

Enfin, $f(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (car $f(n) = 0$ si et seulement si n est divisible par 3).

3) On a $f(0) = f(1) = 0$ donc f n'est pas injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est pair donc f n'est pas surjective (les entiers impairs n'ont pas d'antécédents par f).

Enfin, $f(\{0, \dots, 10\}) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $f(\mathbb{N}) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $f^{-1}(\{0, \dots, 10\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

4) On a $f(0, 0) = f(1, 1) = 1$ donc f n'est pas injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n, 1) = \binom{n}{1} = n$, et on a aussi $f(0, 1) = 0$, donc f est surjective.

On a $\{3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2)\}$ et $f(3, 1) = 3$, $f(4, 1) = 4$, $f(3, 2) = 3$ et $f(4, 2) = 6$ donc $f(\{3, 4\} \times \{1, 2\}) = \{3, 4, 6\}$.

Enfin, $f^{-1}(\{1\}) = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. En effet, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et les autres coefficients binomiaux sont strictement supérieurs à 1.

5) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f \circ f(x, y) = f(f(x, y)) = f(y, x) = (x, y)$, donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Autre méthode : Soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (y, x) = (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (y', x').$$

Par conséquent f est bijective et $f^{-1}(x', y') = (y', x')$ pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ (et donc $f^{-1} = f$).

L'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de la forme $(0, x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, donc $f(\{0\} \times \mathbb{R})$ est l'ensemble des couples $(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$, autrement dit $f(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

6) Soit $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$f(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = x' \\ y + z = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' - z' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x' - y', y' - z', z').$$

Par conséquent f est bijective et $f^{-1}(x', y', z') = (x' - y', y' - z', z')$ pour tout $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

On a $\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. En calculant les images de ces éléments on obtient $f(\{0, 1\}^3) = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 2, 1), (1, 0, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 2, 1)\}$.

7) L'image par φ de l'application nulle est l'application nulle et l'image par φ de l'application $x \mapsto 1$ est aussi l'application nulle, donc φ n'est pas injective.

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet une primitive G (qui est aussi indéfiniment dérivable). Ainsi $\varphi(G) = g$. L'application φ est donc surjective.

Enfin :

$$f \in \varphi^{-1}(\{\text{ch}\}) \Leftrightarrow \varphi(f) = \text{ch} \Leftrightarrow f' = \text{ch} \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{sh } x + \lambda).$$

Par conséquent $\varphi^{-1}(\{\text{ch}\}) = \{x \mapsto \text{sh } x + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

8) L'image par φ de l'application nulle est l'application nulle et l'image par φ de l'application $x \mapsto e^{-x}$ est aussi l'application nulle, donc φ n'est pas injective.

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On sait que l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + y = g$ admet des solutions. Il existe donc une fonction dérivable f telle que $f + f' = g$, i.e. telle que $\varphi(f) = g$. On peut montrer que f est indéfiniment dérivable en écrivant que $f' = g - f$ et en raisonnant par récurrence. L'application φ est donc surjective.

Enfin :

$$f \in \varphi^{-1}(\{\text{ch}\}) \Leftrightarrow \varphi(f) = \text{ch} \Leftrightarrow f + f' = \text{ch}.$$

En résolvant cette équation différentielle on trouve que f est de la forme $x \mapsto \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} + \lambda e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\varphi^{-1}(\{\text{ch}\}) = \{x \mapsto \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} + \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

9) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\{x\} = \{y\}$, donc $x = y$. L'application f est injective.

L'ensemble vide n'a pas d'antécédent par f , donc f n'est pas surjective.

10) Si $A = E$, alors $f = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ qui est bijective. On suppose maintenant que $A \neq E$.

On a $f(A) = A \cap A = A$ et $f(E) = A \cap E = A$, donc f n'est pas injective.

E n'a pas d'antécédent par f puisque pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$ on a $f(B) \subset A$. L'application f n'est donc pas surjective.

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Alors : $B \in f^{-1}(\{A\}) \Leftrightarrow f(B) = A \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. Ainsi $f^{-1}(\{A\}) = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset B\}$ (autrement dit, c'est l'ensemble des parties de E qui contiennent A).

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Alors : $B \in f^{-1}(\{\emptyset\}) \Leftrightarrow f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$. Ainsi $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(\bar{A})$ (autrement dit, c'est l'ensemble des parties de E qui ne rencontrent pas A).

$$11) \text{ Soit } \psi : F \times F \rightarrow E \times E \\ (x, y) \mapsto (f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Pour tout $(x, y) \in E \times E$ on a $\psi \circ \varphi(x, y) = \psi(f(x), f(y)) = (f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) = (x, y)$, donc $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{E \times E}$.

Pour tout $(x, y) \in F \times F$ on a $\varphi \circ \psi(x, y) = \varphi(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = (f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = (x, y)$, donc $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{F \times F}$.

Par conséquent, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.

$$12) \text{ Soit } \psi : F^E \rightarrow F^E \\ f \mapsto f \circ g^{-1}.$$

Pour tout $f \in F^E$ on a $\psi \circ \varphi(f) = \psi(f \circ g) = f \circ g \circ g^{-1} = f$, donc $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{F^E}$.

Pour tout $f \in F^E$ on a $\varphi \circ \psi(f) = \varphi(f \circ g^{-1}) = f \circ g^{-1} \circ g = f$, donc $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{F^E}$.

Par conséquent, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.

13) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(A) = f(B)$. Alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, donc $A = B$ (cf cours). L'application f est donc injective.

Soit $\varphi \in \{0, 1\}^E$ (i.e. une application de E dans $\{0, 1\}$). Posons $A = \varphi^{-1}(\{1\})$ (i.e. l'ensemble des éléments de E dont l'image par φ est 1). Alors pour tout $x \in A$ on a $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\varphi(x) = 1$, et pour tout $x \in \bar{A}$ on a $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. Ainsi pour tout $x \in E$ on a $\mathbf{1}_A(x) = \varphi(x)$, donc $\mathbf{1}_A = \varphi$. L'application f est surjective.

L'application f est donc bijective, et sa réciproque est $f^{-1} : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
 $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(\{1\})$