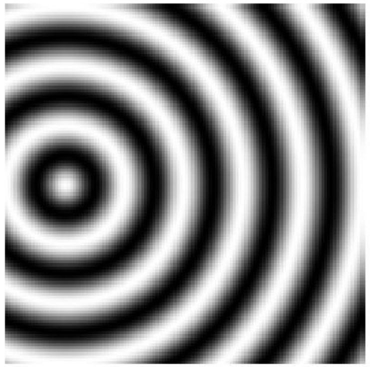
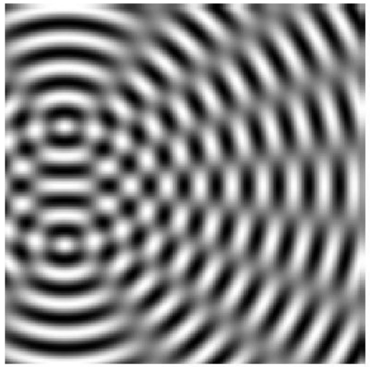
Chapitre 13 : Interférences à deux ondes

Problématique : Si l'on crée des vagues à la surface d'une cuve à onde à l'aide d'un vibreur, on observe une onde circulaire qui s'éloigne du centre. Si l'on place deux vibreurs et qu'on les fait vibrer en phase, on observe sur la cuve des points où l'amplitude des vagues est très importantes et d'autres où l'amplitude est nulle (voir figures ci-dessous : les zones très contrastées sont celles où l'amplitude est forte, les zones grisées, celles où l'amplitude est la plus faible).





- Comment interpréter ce phénomène avec l'outil mathématique ?
- Dans quelles conditions des ondes peuvent-elles s'amplifier ou s'annihiler l'une l'autre ?
- Que se passe-t-il si les ondes ont des fréquences différentes mais très proches ?

1 Superposition de deux ondes synchrones

1.1 Linéarité et principe de superposition

Rappelons que nous considérons des ondes se propageant dans des milieux linéaires, c'est-à-dire tels que les ondes observées sont décrites mathématiquement par une équation différentielle linéaire. L'une des conséquence de cette linéarité est appelée ***principe de superposition*** :

> En présence de plusieurs sources émettant chacune une onde dans l'espace, l'onde résultante observée en tout point de l'espace est égale à la somme des ondes créées par chaque source.

Si on note respectivement $s_1(\mathrm{M},t)$ et $s_2(\mathrm{M},t)$ les vibrations des deux ondes au même point M de l'espace alors la vibration résultante sera :

$$s(\mathrm{M},t) = s_1(\mathrm{M},t) + s_2(\mathrm{M},t)$$

Rq : Si $s_1(\mathrm{M},t)$ et $s_2(\mathrm{M},t)$ sont sinusoïdales de fréquence f alors $s(\mathrm{M},t)$ est aussi sinusoïdale de fréquence f. On va montrer dans ce chapitre que l'amplitude de l'onde résultante dépend des amplitudes des ondes qui interfèrent mais surtout du déphasage entre ces ondes.

1.2 Conditions d'interférences

Considérons deux sources ponctuelles émettant des ondes progressives sinusoïdales **synchrones** et un point M où se superposent ces deux ondes. On note $\Delta\phi(\mathrm{M}) = \phi_1(\mathrm{M}) - \phi_2(\mathrm{M})$ l'avance de phase de l'onde 1 sur l'onde 2 en M. Nous verrons par la suite que l'étude des interférences est indépendante du signe de $\Delta\phi(\mathrm{M})$ (autrement dit indépendante du choix $\phi_1(\mathrm{M}) - \phi_2(\mathrm{M})$ ou $\phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M})$) . C'est pourquoi, par abus de language, nous appellerons par la suite $\Delta\phi(\mathrm{M})$ le **déphasage** bien que cette quantité soit algébrique. Puisque les ondes sont synchrones, le déphasage ne dépend pas du temps. À l'aide de relations trigonométriques, on établit un résultat important.

> La superposition de deux vibrations sinusoïdales synchrones d'amplitudes A_1 et A_2, déphasées d'un angle $\Delta\phi(\mathrm{M})$, est une vibration sinusoïdale de même fréquence et dont l'amplitude résultante A vérifie :
>
> $$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\phi(\mathrm{M}))}}$$

On en déduit l'expression des conditions d'interférences constructives et destructives suivant les valeurs du déphasage :

> Lorsque l'amplitude de l'onde résultante est maximale, on parle **d'interférences constructives**. Cela se produit lorsque les deux ondes vibrent en phase au point M, c'est-à-dire lorsque :
>
> $$\boxed{\Delta\phi(\mathrm{M}) = 0 \ \ [2\pi]}$$

> Lorsque l'amplitude de l'onde résultante est minimale, on parle **d'interférences destructives**. Cela se produit lorsque les deux ondes vibrent en opposition de phase au point M, c'est-à-dire lorsque :
>
> $$\boxed{\Delta\phi(\mathrm{M}) = \pi \ \ [2\pi]}$$
>
> Lorsque les deux ondes ont la même amplitude, l'amplitude de l'onde résultante s'annule lorsque les interférences sont destructives.

1.3 Calcul du déphasage

Nous considérons deux sources S_1 et S_2 qui émettent des ondes synchrones de pulsation ω (mais éventuellement déphasées l'une par rapport à l'autre). Nous notons τ_1 et τ_2 la **durée de parcours** respectivement sur les chemins $S_1 \to M$ et $S_2 \to M$. Alors on peut écrire la vibration de chaque onde, au point M, de la manière suivante :

$$\begin{cases} s_1(M,t) = A_1\cos(\omega(t-\tau_1)+\varphi_1) \\ s_2(M,t) = A_2\cos(\omega(t-\tau_2)+\varphi_2) \end{cases}$$

Le déphasage entre les deux ondes, au point M, s'écrit alors :

$$\Delta\phi(M) = \omega(\tau_2-\tau_1)+\varphi_1-\varphi_2$$

Généralement, nous traiterons le cas particulier où les sources émettent leurs ondes **en phase** (autrement dit $\varphi_2 = \varphi_1$) et le déphasage prend la forme simplifiée ci-dessous :

$$\boxed{\Delta\phi(M) = \omega\Delta t = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$$

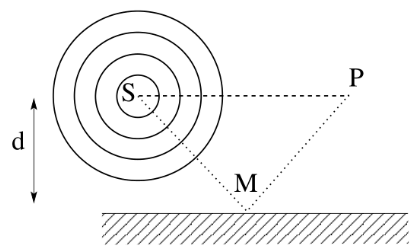
Où $\Delta t = \tau_2 - \tau_1$ et T est la période des ondes.

Remarque : Dans certaines situations il est nécessaire de rajouter un déphasage supplémentaire. Par exemple lorsqu'une onde se réfléchit sur obstacle il arrive parfois qu'elle soit déphasée d'un angle π (mais ce n'est pas systématique). En première année nous n'étudierons pas en détail ces situations ; si jamais un terme supplémentaire doit être ajouté cela sera précisé dans l'énoncé d'un exercice. En deuxième année vous étudierez de manière plus approfondie la réflexion et la transmission d'une onde (acoustique, électromagnétique) à l'interface entre deux milieux différents.

1.4 Application

Une pointe vibrante crée des ondes circulaires à la surface d'une cuve à ondes, de longueur d'onde $\lambda = 1{,}2\,\text{cm}$. Ces ondes se réfléchissent sur un obstacle plan supposé très long. Le point S et le point P sont à la même distance $d = 8{,}7\,\text{cm}$ de l'obstacle et séparés d'une distance $SP = 2d$.

Décrire la nature des interférences au point P sachant que la réflexion sur le plan s'accompagne d'un déphasage égal à π.



1.5 Retour sur les ondes stationnaires

Interpréter l'onde stationnaire qui apparaît lors de la réflexion d'une onde progressive sinusoïdale sur une paroi rigide en terme d'interférences constructives et destructives.

2 Cas particulier des ondes lumineuses

Les interférences entre ondes lumineuses ont l'avantage de pouvoir être observées à l'œil nu. Pour les faire apparaître, il faut toutefois remplir certaines conditions qui ne seront pas détaillées dans ce chapitre mais qui sont au programme de deuxième année. Nous allons admettre pour l'instant l'une d'entre elles :

Pour observer des interférences entre deux ondes lumineuses, celles-ci **doivent être issues de la même source**.

Par la suite, nous pourrons donc considérer que $\varphi_2 = \varphi_1$ (voir **1.3.**).

2.1 Chemin optique

2.1.1 Définition

Tout ce qui a été dit dans la partie 1 s'applique aux ondes lumineuses. Toutefois, on va définir des grandeurs physiques spécifiques à l'étude ce type d'interférences et qui facilitent grandement l'analyse.

Considérons une onde lumineuse qui se propage entre deux points A et B de l'espace. Le **chemin optique** de l'onde entre A et B est défini par :

$$\boxed{(AB) = c\tau_{AB}}$$

où τ_{AB} est la durée de propagation de l'onde lumineuse entre A et B et c est la célérité de la lumière dans le vide. Le chemin optique est homogène à une **longueur**.

2.1.2 Cas d'un MHTI

Si, entre A et B, l'onde lumineuse se propage dans un unique MHTI d'indice de réfraction n, on montre rapidement que le chemin optique s'écrit en fonction de la distance entre A et B :

$$\boxed{(AB) = nAB}$$

Rq : D'après le principe de retour inverse de la lumière, **le chemin optique est indépendant du sens de parcours**.

Rq : Si l'onde change de MHTI au cours de sa propagation (en se réfractant), on somme les chemins optiques dans chaque milieu. Exemple pour une réfraction en I entre deux milieux d'indice n_1 et n_2 :

$$(AB) = n_1AI + n_2BI$$

Rq : Pour certaines réflexions l'onde lumineuse peut être déphasée d'un angle π, cela revient alors à ajouter un terme supplémentaire égal à $\frac{\lambda}{2}$ dans l'expression de son chemin optique, où λ est la longueur d'onde **dans le vide**.

2.2 Différence de marche, ordre d'interférence

On a admis que les interférences lumineuses se produisent à condition que les deux ondes soient issues de la même source. Un dispositif interférentiel doit donc être construit de manière à permettre aux ondes lumineuses de se propager d'un même point source S à un même point M **par deux chemins différents**. Il existe différentes manières d'y arriver, en utilisant des objets diffractants, des miroirs ou encore des lames semi-réfléchissantes. Par exemple, le montage des trous d'Young que nous allons étudier dans ce chapitre exploite le phénomène de la diffraction.

Comme les deux ondes sont issues de la même source, le déphasage au point M s'écrit $\Delta\phi(M) = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$ (voir **1.3**). Il dépend des durées de parcours de chaque onde, donc de leur chemin optique.

Def : La **différence de marche** $\delta(M)$ et l'**ordre d'interférence** $p(M)$ entre les deux ondes lumineuses, au point M, sont définies par :

$$\boxed{p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{\Delta\phi(M)}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}}$$

où λ est la longueur d'onde **dans le vide**. Un calcul rapide permet de montrer que la différence de marche s'écrit de manière simple en fonction des chemins optiques (dans le cas où il n'y a pas de réflexion sur un miroir) :

$$\boxed{\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1}$$

où $(SM)_1$ et $(SM)_2$ sont les chemins optiques sur chacun des deux chemins suivis entre S et M.

2.3 Nouvelle expression des conditions d'interférences

Au lieu d'utiliser le déphasage $\Delta\phi(M)$, on peut exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives de deux ondes en termes de différence de marche ou bien d'ordre d'interférence.

Il y a interférences **constructives** lorsque $p(M)$ est un **entier**.

$$\boxed{\delta(M) = 0 \ [\lambda]} \qquad \boxed{p(M) = 0 \ [1]}$$

Il y a interférences **destructives** lorsque $p(M)$ est un **demi-entier**.

$$\boxed{\delta(M) = \frac{\lambda}{2} \ [\lambda]} \qquad \boxed{p(M) = \frac{1}{2} \ [1]}$$

Rq : La différence de marche permet de ramener l'étude de la nature des interférences en M à un simple calcul de distances. L'ordre d'interférence permet de reconnaître du premier coup d'œil la nature des interférences puisqu'il est simple de reconnaître une valeur entière, demi-entière ou autre.

2.4 Formule de Fresnel

Une onde électromagnétique est la propagation dans l'espace et le temps d'un champ électromagnétique $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Nous admettrons (ce sera détaillé en deuxième année) que l'on peut ici caractériser la propagation des ondes lumineuses par un champ **scalaire** (on parle de modèle scalaire de la lumière). Pour une onde lumineuse monochromatique, on notera A l'amplitude de ce champ. On admet le résultat suivant (lui aussi justifié en deuxième année) :

L'intensité I d'une onde lumineuse est proportionnelle au **carré de l'amplitude de cette onde**.

$$\boxed{I = KA^2}$$

où K est une constante de proportionnalité dont on ne cherchera pas l'expression.

On considère deux ondes lumineuses synchrones d'amplitudes A_1 et A_2 qui interfèrent en un point M de l'espace. On note $I_{01} = KA_1^2$ et $I_{02} = KA_2^2$ les intensités lumineuses théoriques que l'on mesurerait en M si chacune des deux ondes était seule. La formule de Fresnel donne l'expression de l'intensité lumineuse résultante I lorsqu'il y a superposition des deux ondes. On l'établit rapidement à partir du résultat de **1.2**.

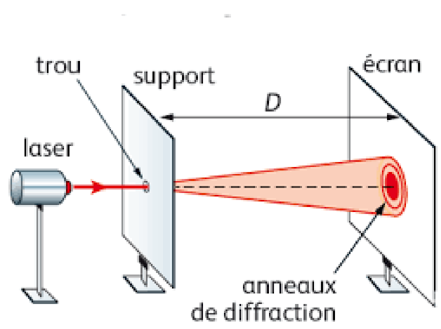
$$\boxed{I = I_{01} + I_{02} + 2\sqrt{I_{01}I_{02}}\cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}\right)}$$

Dans le cas particulier où les deux ondes ont même amplitude A (on note $I_0 = KA^2$), on obtient alors :

$$\boxed{I = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}\right)\right]}$$

3 Montage des trous d'Young

3.1 Introduction - diffraction à travers un trou unique

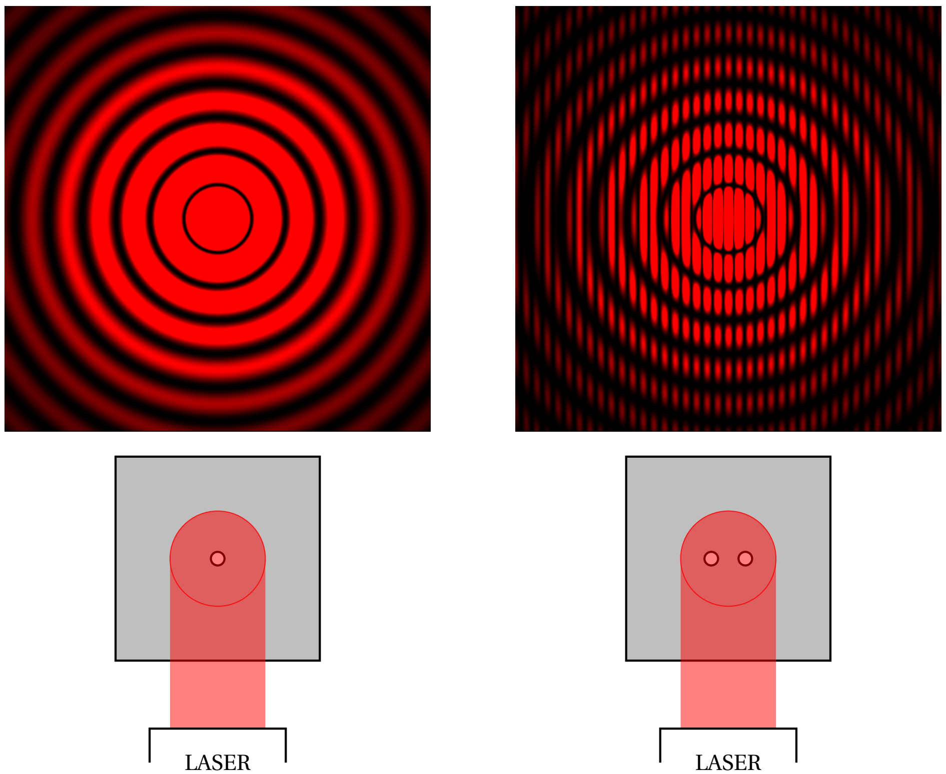


Le phénomène de diffraction se produit de manière sensible lorsqu'une onde rencontre un obstacle dont la taille caractéristique est légèrement supérieure à sa longueur d'onde. C'est par exemple le cas lorsqu'une onde lumineuse monochromatique rencontre un écran opaque percé d'un trou dont le diamètre est de l'ordre de quelques microns (rappel : dans le visible, la longueur d'onde dans le vide est de l'ordre de $0,4\,\mu$m à $0,8\,\mu$m). La figure de diffraction observée sur un écran éloigné est constituée d'anneaux alternativement clairs et sombres, centrés sur l'axe du faisceau incident. Le centre de la figure est clair et l'intensité lumineuse des anneaux décroît à mesure que l'on s'éloigne du centre. On note une symétrie par rapport au centre de la figure de diffraction qui est due à la forme de l'objet diffractant (trou circulaire).

L'étude de la diffraction n'est pas au programme de ce chapitre, mais on retiendra la propriété suivante :

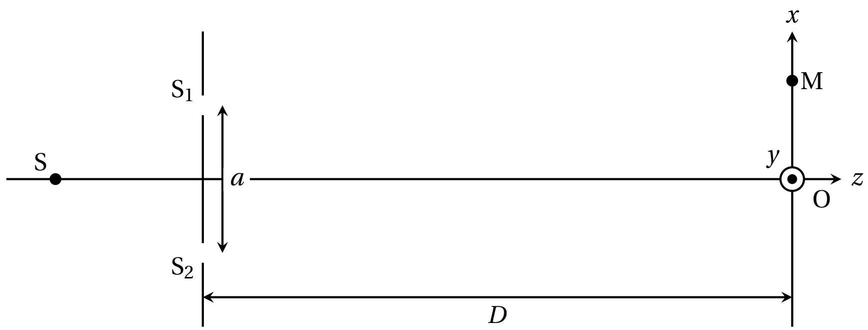
> La diffraction disperse l'onde lumineuse incidente **dans toutes les directions de l'espace**, derrière le trou. Par la suite, on ne se préoccupera pas du fait que l'amplitude de l'onde diffractée n'est pas la même dans toutes les directions.

3.2 Schéma du montage et observations



Le montage des trous d'Young s'obtient en rajoutant au montage précédent un deuxième trou, identique au premier. Sur l'écran, on observe alors la figure de diffraction à un trou à laquelle se superpose **des franges d'interférences rectilignes**, régulièrement espacées et orientées perpendiculairement au segment qui joint le centre des deux trous.

D'un point de vue optique, chaque trou se comporte comme une source lumineuse secondaire qui éclaire l'écran. Comme les ondes passant par chacun des deux trous sont issues de la même source primaire, celles-ci peuvent **interférer sur l'écran**. On modélise schématiquement le système de la manière suivante :



- La source S est supposée ponctuelle, située à égale distance des deux trous, et monochromatique (longueur d'onde dans le vide λ),
- les centres des deux trous sont distants de a,
- on regarde la figure d'interférences sur un écran situé à grande distance : $a \ll D$,
- on repère un point de l'écran par ses coordonnées cartésiennes (x, y). On considère un point proche de l'axe : $x \ll D$ et $y \ll D$.

3.3 Allure des franges, interfrange

> Def : On appelle **frange d'interférence** l'ensemble des points de l'écran correspondant à une même valeur de la différence de marche (donc de l'ordre d'interférence).

À l'œil nu, on reconnaît une frange au fait que l'intensité lumineuse reste inchangée quand on s'y déplace d'un point à un autre. On appelle **franges claires** (resp. **franges sombres**) celles qui correspondent à un ordre d'interférence entier (resp. demi-entier).

Pour déterminer mathématiquement l'allure des franges d'interférences, il faut d'abord calculer la différence de marche en un point de l'écran. En utilisant (entre autres) l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq \alpha\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \ll 1$, on montre que :

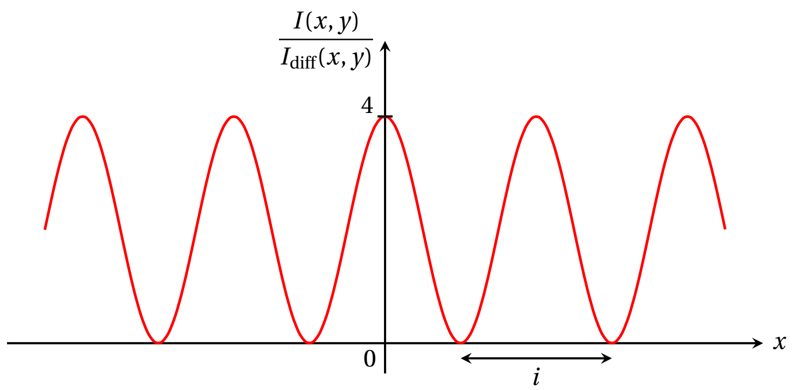
$$\boxed{\delta(x, y) = \frac{ax}{D}}$$

La différence de marche est indépendante de y, ce qui signifie que les franges d'interférences sont les courbes définies par $x =$ Cste, autrement dit des droites parralèles à l'axe (Oy). C'est conforme aux observations.

À partir du résultat précédent, on peut exprimer l'intensité lumineuse en tout point de l'écran grâce à la formule de Fresnel :

$$\boxed{I(x,y) = 2I_{\text{diff}}(x,y)\left[1+\cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right)\right]}$$

où $I_{\text{diff}}(x,y)$ est l'intensité lumineuse observée sur l'écran lorsqu'il n'y a qu'une seule onde, autrement dit l'intensité lumineuse obtenue dans le cas d'une diffraction à travers un seul trou. La contribution des interférences intervient *via* une fonction périodique de x, ce qui est là encore cohérent avec l'observation.



Def : On appelle **interfrange** i la période spatiale des franges.

Avec les trous d'Young, l'interfrange de la figure d'interférences vaut :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

L'interfrange est inversement proportionnel à la distance qui sépare les centres des deux trous.

4 Superposition de deux ondes de fréquence proches, battements

Lorsque deux ondes sinusoïdales de fréquences f_1 et f_2 différentes mais proches ($|f_2 - f_1| \ll f_1$ et $|f_2 - f_1| \ll f_2$) se superposent, il apparaît un phénomène particulier appelé **battements**. L'amplitude résultante est **modulée dans le temps**, avec une fréquence bien particulière. On admet le résultat suivant :

La fréquence f des battements est égale à la différence des fréquences des deux ondes qui se superposent : $f = |f_2 - f_1|$.

Si l'on représentait graphiquement l'allure de la vibration au point M, voici à quoi cela ressemblerait (cas où les deux ondes qui se superposent ont exactement la même amplitude) :