

TD10 : Énergétique - corrigé

★ Exercice 1 : Chute verticale avec frottements

1. On reprend le mouvement avec un axe (Oz) ascendant. Dans ces conditions, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = mgz$ et, au cours de l'ascension, la force de frottement, opposée au déplacement, s'écrit $\vec{F} = -f\vec{u}_z$. On applique le TEC à la masse, en ascension entre le point A et le point B, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{F})$$

où :

- $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = -\frac{1}{2}mv_0^2$,
- $W(\vec{P}) = -\Delta E_p = mg(z_A - z_B) = -mgh$ est le travail du poids,
- $W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot dz\vec{u}_z = -f(z_B - z_A) = -fh$ est le travail de la force de frottement.

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh - fh \iff h = \frac{mv_0^2}{2(mg + f)} = 4,1 \text{ m}$$

2. On applique à nouveau le TEC à la masse, en chute entre le point B et le point A, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Au cours de la chute, la force de frottement, toujours opposée au déplacement, s'écrit $\vec{F} = f\vec{u}_z$.

- $\Delta E_c = E_c(A) - E_c(B) = \frac{1}{2}mv_A'^2$,
- $W(\vec{P}) = -\Delta E_p = mg(z_B - z_A) = mgh$,
- $W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot dz\vec{u}_z = f(z_A - z_B) = -fh$.

$$\frac{1}{2}mv_A'^2 = mgh - fh \iff v_A' = \sqrt{\frac{2(mg - f)h}{m}} = \sqrt{\frac{mg - f}{mg + f}}v_0 = 7,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

★ Exercice 2 : Champ gravitationnel terrestre

1. On cherche une énergie potentielle $E_p(z)$ qui vérifie :

$$\vec{F}_g = -\vec{\text{grad}}E_p \iff \frac{GmM_T}{(R_T + z)^2} = \frac{dE_p}{dz}$$

On intègre cette équation différentielle :

$$E_p(z) = -\frac{GmM_T}{R_T + z} + \text{Cste}$$

Enfin, puisque l'origine de l'énergie potentielle est prise à l'infini, la constante d'intégration est nulle :

$$E_p(z) = -\frac{GmM_T}{R_T + z}$$

2. a) On applique le TEC à la masse, entre le sol ($z = 0$, vitesse v_0) et le sommet de la trajectoire ($z = z_{\text{max}}$, vitesse nulle) : $\Delta E_c = W(\vec{F})$, où :

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$W(\vec{F}) = -\Delta E_p = E_p(z = 0) - E_p(z = z_{\text{max}}) = GmM_T \left(\frac{1}{R_T + z_{\text{max}}} - \frac{1}{R_T} \right)$$

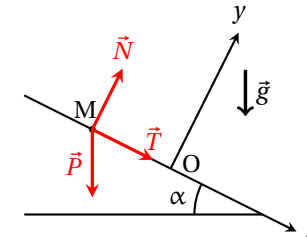
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = GmM_T \left(\frac{1}{R_T + z_{\text{max}}} - \frac{1}{R_T} \right) \iff r_{\text{max}} = R_T + z_{\text{max}} = \left(\frac{1}{R_T} - \frac{v_0^2}{2GM} \right)^{-1}$$

2. b) Le résultat de la question précédente n'est défini que pour $R_T + z_{\text{max}} > 0$, c'est-à-dire :

$$v_0 < v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

En conclusion, l'objet s'arrête (et donc retombe ensuite sur le sol) uniquement si $v_0 < v_2$. La vitesse v_2 , appelée **deuxième vitesse cosmique**, est la vitesse limite à partir de laquelle un objet lancé depuis la surface du sol (en négligeant tout frottement), ne retombe pas sur le sol mais s'éloigne à l'infini, s'échappant ainsi du champ gravitationnel terrestre.

★ Exercice 3 : Solide sur un plan incliné



1. La réaction du support a une composante normale et une composante tangentielle : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Pour obtenir des informations sur ces composantes, on applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

On projette le PFD dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha + T & (1) \\ 0 = -mg \cos \alpha + N & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) permet de déterminer la réaction normale : $N = mg \cos \alpha$. On détermine T en utilisant la deuxième loi de Coulomb (la masse glisse sur le plan incliné) :

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| \iff T = fmg \cos \alpha$$

La réaction du support s'écrit donc : $\vec{R} = mg \cos \alpha (f\vec{u}_x + \vec{u}_y)$.

TD10 : Énergétique - corrigé

2. On applique le TEC à la masse, entre le point O ($x = 0, v = V_0$) et le sommet de la trajectoire (noté P , $x = -\frac{H_m}{\sin \alpha}$, vitesse nulle) :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

avec :

- $\Delta E_c = E_c(P) - E_c(O) = -\frac{1}{2}mV_0^2,$
- $W(\vec{P}) = -(E_p(P) - E_p(O)) = -mgH_m,$
- $W(R) = \int_0^P \vec{R} \cdot dx \vec{u}_x = \int_0^P \underbrace{\vec{N} \cdot dx \vec{u}_x}_{=0} + \int_0^P \vec{T} \cdot dx \vec{u}_x = -fmg \cos \alpha \frac{H_m}{\sin \alpha} = -fmgH_m \cotan \alpha.$

$$-\frac{1}{2}mV_0^2 = -mgH_m - fmgH_m \cotan \alpha \iff H_m = \frac{V_0^2}{2g(1 + f \cotan \alpha)}$$

3. D'après la question précédente : $\Delta E_c = -\frac{mV_0^2}{2}$.

La variation d'énergie potentielle de pesanteur s'écrit : $\Delta E_p = mgH_m = \frac{1}{1 + f \cotan \alpha} \cdot \frac{mV_0^2}{2}$.

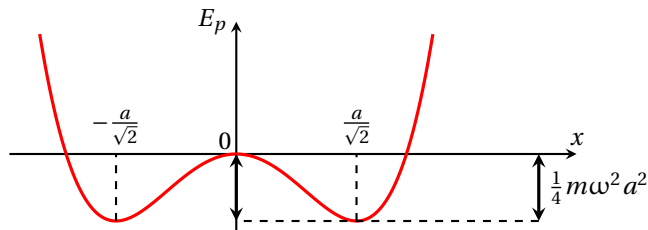
La variation d'énergie mécanique s'écrit : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{-f \cotan \alpha}{1 + f \cotan \alpha} \cdot \frac{mV_0^2}{2}$.

★ Exercice 4 : Barrière de potentiel

1. On étudie les variations de $E_p(x)$:

$$E_p'(x) = m\omega^2 \left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x \right) = 2m\omega^2 \left(2\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) x$$

L'énergie potentielle est minimale en $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ et maximale en $x = 0$. On trace l'allure de son graphe :



Les positions $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ sont de **positions d'équilibre stables**. La position $x = 0$ est une **position d'équilibre instable**.

On détermine la dérivée seconde de l'énergie potentielle dans l'une des positions d'équilibre stable : $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}) = 4m\omega^2$. On en déduit l'expression de la pulsation des petites oscillations harmoniques autour de ces positions d'équilibre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{\pm \frac{a}{\sqrt{2}}}} = 2\omega$$

2. Par définition de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \iff F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -m\omega^2 \left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x \right)$$

On simplifie cette expression sous la forme suivante :

$$F(x) = -\frac{4m\omega^2}{a^2} x \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \left(x + \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

Rq : On reconnaît à cette expression les trois positions d'équilibre (celles pour lesquelles $F(x) = 0$).

3. On choisit arbitrairement la position d'équilibre $x_s = \frac{a}{\sqrt{2}}$. On exprime la force en fonction de ε :

$$F(\varepsilon) = -\frac{4m\omega^2}{a^2} \left(\varepsilon + \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \left(\varepsilon + \sqrt{2}a \right) \varepsilon$$

On développe au premier ordre autour de $\varepsilon = 0$:

$$F(\varepsilon) \approx -\frac{4m\omega^2}{a^2} \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}a \times \varepsilon = -4m\omega^2 \varepsilon$$

On applique ensuite le PFD au mobile, supposé soumis uniquement à la force F :

$$m\ddot{x} = F$$

Sachant que $\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$, on aboutit à :

$$m\ddot{\varepsilon} = -4m\omega^2 \varepsilon \iff \ddot{\varepsilon} + 4\omega^2 \varepsilon = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un OH de pulsation propre :

$$\omega_0 = 2\omega$$

Le résultat est cohérent avec celui de la question 1.

4. Placée initialement dans l'une des positions d'équilibre stable, la masse doit avoir une énergie mécanique suffisante pour ne pas être piégée dans un puits de potentiel. Pour cela, il faut que :

$$E > 0 \iff \frac{1}{2}m v_0^2 + E_p(x = x_s) > 0$$

En exprimant l'énergie potentielle, on obtient :

$$\frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 > 0 \iff v_0 > \frac{a\omega}{\sqrt{2}}$$

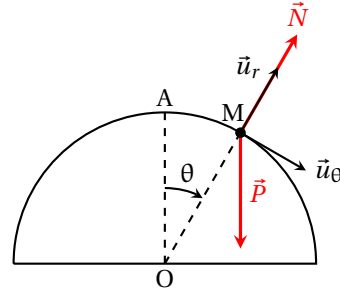
TD10 : Énergétique - corrigé

★★ Exercice 5 : Point glissant sans frottement sur un cercle

1. On applique le TEC entre le point de départ A (sommet du cercle, $\theta = 0$, vitesse nulle) et le point M (θ, v). La réaction du support est normale car il n'y a pas de frottement.

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{N})$$

On rappelle qu'en coordonnées polaires, pour un mouvement circulaire, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies v^2 = R^2\dot{\theta}^2$. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit ici (en prenant comme origine des potentiels la position $\theta = 0$) : $E_p(\theta) = mgR(\cos\theta - 1)$.



- $\Delta E_c = E_c(M) - E_c(A) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$,
- $W(\vec{P}) = -(E_p(M) - E_p(A)) = mgR(1 - \cos\theta)$,
- $W(\vec{N}) = 0$ car \vec{N} est orthogonale au mouvement.

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = mgR(1 - \cos\theta) \iff mR\dot{\theta}^2 = 2mg(1 - \cos\theta)$$

2. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté dans la base polaire :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos\theta & \text{sur } \vec{u}_r \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin\theta & \text{sur } \vec{u}_\theta \end{cases}$$

La projection sur \vec{u}_r permet de déterminer la réaction du support : $N = mg \cos\theta - mR\dot{\theta}^2$. En utilisant le résultat de la question précédente, on peut exprimer N uniquement en fonction de la variable θ :

$$N = mg(3 \cos\theta - 2)$$

3. La masse quitte le cercle à partir du moment où la réaction du support s'annule, c'est-à-dire pour l'angle θ tel que : $\cos\theta = \frac{2}{3}$.

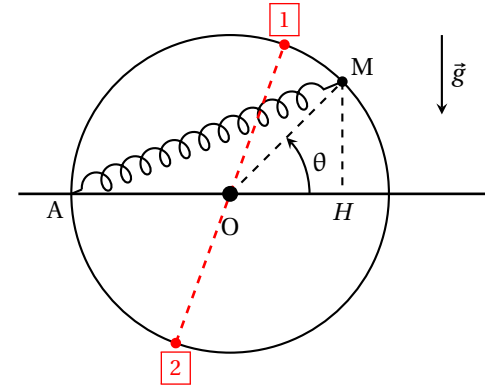
★★ Exercice 6 : Équilibre sur un cercle

1. En prenant comme origine des potentiels la position $\theta = 0$, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_{p,pes} = mgR \sin\theta$. L'énergie potentielle élastique vaut : $E_{p,el} = \frac{1}{2}kAM^2$. On détermine AM en utilisant le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = (R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 = 2R^2(1 + \cos\theta)$$

L'énergie potentielle totale de la masse s'écrit :

$$E_p = mgR \sin\theta + kR^2(1 + \cos\theta)$$



2. On étudie les variations de $E_p(\theta)$: $\frac{dE_p}{d\theta} = mgR \cos\theta - kR^2 \sin\theta$. Les positions d'équilibre correspondent aux positions qui vérifient :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff \tan\theta = \frac{mg}{kR}$$

Cette équation a deux solutions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Elles sont représentées sur le schéma ci-dessus.

3. La position d'équilibre 1 est elle que $\cos\theta_1 > 0$ et $\sin\theta_1 > 0$. La position d'équilibre 2 est elle que $\cos\theta_2 < 0$ et $\sin\theta_2 < 0$. Pour déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre, on détermine la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mgR \sin\theta - kR^2 \cos\theta$$

Compte tenu des signes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ évoqués plus haut, $\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_1} < 0$ et $\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_2} > 0$. **La position d'équilibre 1 est instable et la position d'équilibre 2 est stable.**

Comme vu en cours, la pulsation propre des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable θ_2 vérifie :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{mR^2} \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_2} = -\frac{g}{R} \sin\theta_2 - \frac{k}{m} \cos\theta_2$$

Pour déterminer $\cos\theta_2$ et $\sin\theta_2$, on utilise :

$$\begin{cases} mgR \cos\theta_2 = kR^2 \sin\theta_2 \\ \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1 \end{cases}$$

Après calculs, on montre que :

$$\cos\theta_2 = -\frac{kR}{\sqrt{(mg)^2 + (kR)^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_2 = -\frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (kR)^2}}$$

TD10 : Énergétique - corrigé

En injectant ces expressions dans celle de ω_0 , on obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{mg}{\sqrt{(mg)^2 + (kR)^2}} + \frac{k}{m} \cdot \frac{kR}{\sqrt{(mg)^2 + (kR)^2}} = \frac{1}{mR} \cdot \frac{(mg)^2 + (kR)^2}{\sqrt{(mg)^2 + (kR)^2}} = \frac{1}{mR} \sqrt{(mg)^2 + (kR)^2} = \sqrt{\left(\frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

En passant à la racine, on trouve :

$$\omega_0 = \left(\left(\frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}$$

★★ Exercice 7 : Mouvement rectiligne d'un véhicule à moteur

1. On applique le TPC au véhicule dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le véhicule est soumis à son poids, à la réaction du sol (normale \vec{N} et tangentielle \vec{T}) et à la force de frottement de l'air.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{N}) + \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{F})$$

avec :

- $\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = mv \frac{dv}{dt} = mv^2 \frac{dv}{dx}$ car $dt = \frac{dx}{v}$,
- $\mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{P}(\vec{N}) = 0$ car ces deux forces sont orthogonales au mouvement,
- $\mathcal{P}(\vec{T}) = \mathcal{P} = \text{Cste}$ d'après l'énoncé,
- $\mathcal{P}(\vec{F}) = -\beta mv \vec{v} \cdot \vec{v} = -\beta mv^3$.

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = \mathcal{P} - \beta mv^3 \iff \frac{mv^2}{\mathcal{P} - \beta mv^3} dv = dx$$

2. On intègre cette équation différentielle entre le point de départ ($x = 0, v = 0$) et un point quelconque (x, v) :

$$\int_0^v \frac{mv'^2}{\mathcal{P} - \beta mv'^3} dv' = \int_0^x dx' \iff \left[-\frac{1}{3\beta} \ln(\mathcal{P} - \beta mv'^3) \right]_0^v = \frac{1}{3\beta} \ln \left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P} - \beta mv^3} \right) = x(v)$$

3. On inverse la relation obtenue à la question précédente pour déterminer la vitesse $v(x)$:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P} - \beta mv^3} = e^{3\beta x} \iff v(x) = \left[\frac{\mathcal{P}}{\beta m} (1 - e^{-3\beta x}) \right]^{\frac{1}{3}}$$

Quand $x \rightarrow \infty$, la vitesse tend vers une valeur limite $v_\ell = \left(\frac{\mathcal{P}}{\beta m} \right)^{\frac{1}{3}}$.

4. Le coefficient β vaut $\beta = \frac{\mathcal{P}}{mv^3} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

D'après l'expression de $v(x)$ obtenue à la question précédente, la vitesse vaut $v_\ell/2$ lorsque :

$$1 - e^{-3\beta x} = \frac{1}{8} \iff x = -\frac{1}{3\beta} \ln \left(\frac{7}{8} \right) = 43 \text{ m}$$

★★ Exercice 8 : Looping

La méthode employée est similaire à celle des exercices 5 et 8. On détermine une relation entre $\hat{\theta}^2$ et θ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, puisqu'on néglige les frottements.

$$E(M) = E(A) \iff \frac{1}{2} ma^2 \hat{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta) = mgH \iff ma\hat{\theta}^2 = 2mg \left(\cos\theta - 1 + \frac{H}{a} \right)$$

Pour déterminer la réaction N du support, on applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_r :

$$-ma\hat{\theta}^2 = mg \cos\theta - N \iff N = mg \cos\theta + ma\hat{\theta}^2 = mg \left(3 \cos\theta - 2 + \frac{2H}{a} \right)$$

La masse effectue un tour complet sans quitter la gouttière à condition que N ne s'annule jamais, c'est-à-dire que :

$$\frac{2H}{a} - 2 > 3 \iff H > H_{\min} = \frac{5a}{2}$$

★★ Exercice 9 : Pendule butant contre un clou

1. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique du pendule se conserve. Comme en A et B, l'énergie cinétique est identique (elle est nulle) et l'énergie mécanique aussi, alors il en va de même pour l'énergie potentielle de pesanteur. Par conséquent, **A et B sont à la même altitude**. Mathématiquement, cela se traduit par la relation :

$$\frac{2\ell}{3} + \frac{\ell}{3} \cos\theta = \ell \cos\theta_0 \iff \cos\theta = 3 \cos\theta_0 - 2$$

L'application numérique donne $\theta = -35^\circ$.

2. On va déterminer l'expression de la tension T du fil, en fonction de la seule variable θ . Pour cela, on emploie la même méthode que pour le calcul de la réaction normale dans l'exercice 5. Dans un premier temps, on établit une relation entre $\hat{\theta}^2$ et θ à l'aide d'un bilan énergétique, en l'occurrence en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Soit M un point quelconque sur la trajectoire du pendule. En prenant pour origine la position $\theta = 0$, l'énergie potentielle de pesanteur du pendule dans le domaine $\theta < 0$ (longueur du fil égale à $\frac{\ell}{3}$) s'écrit : $E_p = mg \frac{\ell}{3} (1 - \cos\theta)$. Au point de départ, $E_p = mg\ell$.

$$E(M) = E(A) \iff \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{3} \right)^2 \hat{\theta}^2 + mg \frac{\ell}{3} (1 - \cos\theta) = mg\ell \iff m\ell \hat{\theta}^2 = 6mg(2 + \cos\theta)$$

On applique le PFD au pendule, dans le domaine $\theta < 0$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_r :

$$-m \frac{\ell}{3} \hat{\theta}^2 = mg \cos\theta - T \iff T = mg \cos\theta + m \frac{\ell}{3} \hat{\theta}^2 = mg(4 + 3 \cos\theta)$$

On constate que la tension du fil $T(\theta)$ ne s'annule jamais, quelle que soit la valeur de θ . Par conséquent, **le fil ne se détend jamais et s'enroule autour du clou**.

