Devoir n°15 (non surveillé)

EXERCICE 1

À tout entier naturel n on associe l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle est convergente. On notera L sa limite.

3) a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

b) En déduire un encadrement de I_n (on commencera par encadrer $1+x^2$ lorsque $x \in [0,1]$), puis déterminer la valeur de L.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

5) a) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{2}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

c) En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Exprimer S_n en fonction de I_0 et de I_{2n+2}. Indication : utiliser 4)a).

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

c) De même, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$.

EXERCICE 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

1) Calculer des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3 à 10^{-2} près. Que peut-on conjecturer ?

2) a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{v_n^2 - u_n^2}{4}$.

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4^n}$.

c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.

d) Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, que l'on notera ℓ.

f) Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

3) Soit θ un réel. À tout entier naturel non nul n on associe le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \sin \dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} \sin \theta$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (p_n). On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{\pi}{3.2^k}$ et $u_n = v_n \cos \dfrac{\pi}{3.2^n}$.

b) En déduire la valeur exacte de ℓ.