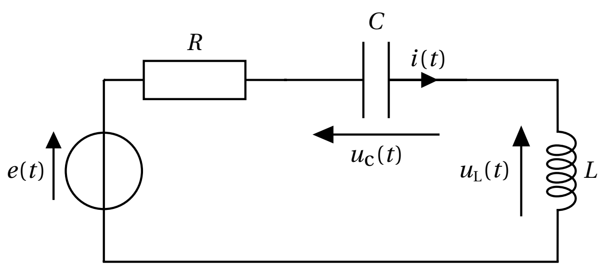
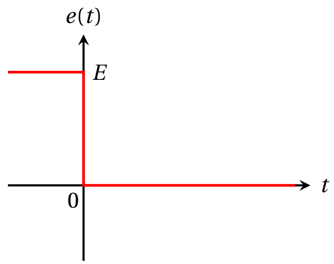
Chapitre 14 : Oscillateur amorti - régime transitoire du deuxième ordre

1 Équation d'évolution en régime libre

1.1 Circuit RLC série





Le circuit RLC série est un système du deuxième ordre. Il est régi par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène car on étudie le régime libre (pas de générateur) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = 0}$$

1.2 Système {masse + ressort} amorti par frottements fluide

Une masse m est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Elle se déplace sur un axe (Ox) horizontal en étant soumise à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. On note X l'allongement du ressort. X est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène :

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

Cette équation d'évolution est similaire à celle du circuit RLC série. Elle est caractéristique des oscillateurs amortis, le terme d'amortissement correspond au facteur proportionnel à la dérivée première. Les comportements de ces deux systèmes sont similaires. Pour synthétiser l'étude de ces deux types d'oscillateur amortis, on écrit l'équation différentielle sous sa forme canonique.

1.3 Formes canoniques de l'équation d'évolution

On utilisera dans ce chapitre deux expressions équivalentes de l'équation canonique :

$$\boxed{\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

Où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, λ est appelé **facteur d'amortissement** (homogène à l'inverse d'un temps) et Q est le **facteur de qualité** (sans dimension).

Par définition, Q, ω_0 et λ sont reliés par : $\boxed{2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}}$.

1.4 Analogie électromécanique

Le comportement de l'oscillateur mécanique est similaire à celui de l'oscillateur électrique. La structure de l'équation d'évolution permet de mettre en évidence le rôle de chaque constituant du système et de faire une analogie entre les termes électriques et mécaniques :

Caractéristique	Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
Inertie	L	m
Raideur	$\frac{1}{C}$	k
Amortissement	R	α
Position	q	X
Mouvement	i	v
Energie potentielle	$\frac{q^2}{2C}$	$\frac{kX^2}{2}$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}mv^2$
Puissance dissipée par frottement	Ri^2	αv^2

2 Évolution du système en régime libre

2.1 Équation caractéristique

On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle **homogène** d'un oscillateur amorti le polynôme $\boxed{\mathscr{P} : r \mapsto r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2}$.

La solution générale de l'équation homogène dépend de la nature des racines de ce polynôme, autrement dit **du signe du discriminant** Δ de l'équation caractéristique :

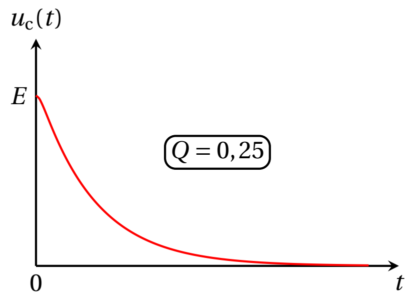
$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{(EC)}$$

2.2 $\Delta > 0 \iff Q < \frac{1}{2}$: le régime apériodique

(EC) possède deux racines réelles r_1 et r_2. La solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$u_c(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration. Dans ce régime l'amortissement se fait sans oscillations. Le régime apériodique correspond à un facteur de qualité faible donc **à des frottements forts**.

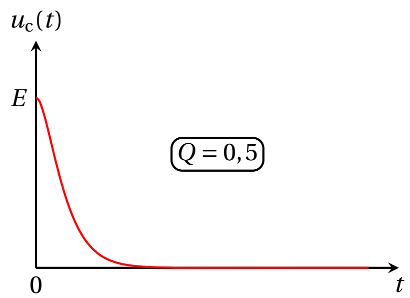


2.3 $\Delta = 0 \iff Q = \frac{1}{2}$: le régime critique

((EC) possède une racine réelle double r. La solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$u_c(t) = (At + B) e^{rt}$$

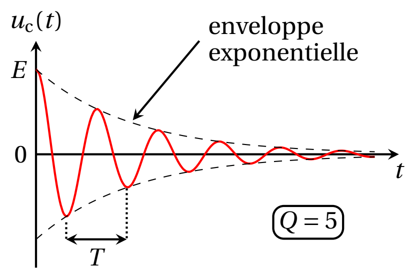
Là encore il y a amortissement sans oscillation.



2.4 $\Delta < 0 \iff Q > \frac{1}{2}$: le régime pseudopériodique

(EC) possède deux racines complexes conjuguées $\underline{r}$ et $\underline{r}^*$ (on suppose que $\underline{r}$ est la racine de partie imaginaire positive). La solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$u_c(t) = \left(A\cos\left[\mathrm{Im}(\underline{r})t\right] + B\sin\left[\mathrm{Im}(\underline{r})t\right]\right) e^{\mathrm{Re}(\underline{r})t}$$



Le système **oscille** avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle dans le temps. Le régime pseudopériodique correspond à un facteur de qualité élevé donc **à des frottements faibles**.

<u>Def</u> : On appelle respectivement **pseudopulsation** et **pseudopériode** les quantités :

$$\omega = \mathrm{Im}(\underline{r}) \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il s'agit de la pulsation et de la période de la partie sinusoïdale de $u_c(t)$, qu'on peut donc également écrire sous la forme : $u_c(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\, e^{\mathrm{Re}(\underline{r})t}$.

<u>Def</u> : En régime pseudopériodique, le décrément logarithmique est défini par :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u_c(t) - u_c(\infty)}{u_c(t+nT) - u_c(\infty)}\right)$$

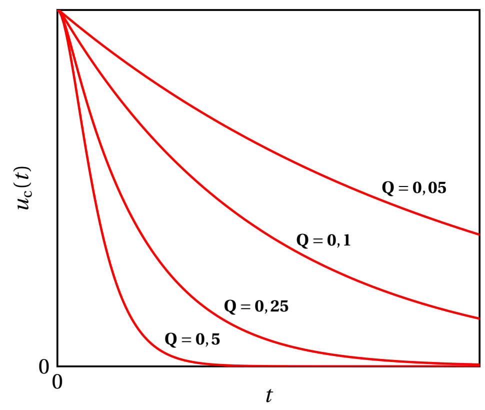
Où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la pseudopériode. On montre par le calcul que $\underline{\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q}}$.

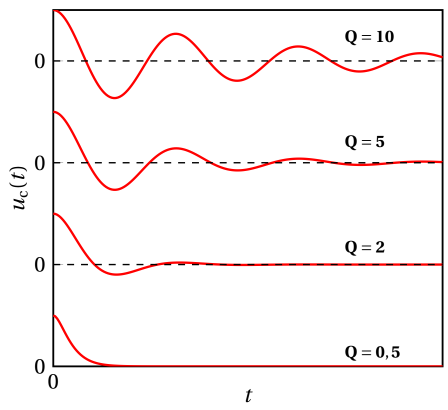
À retenir : À partir d'un graphe représentant les oscillations amorties du système, la mesure de δ et T permet d'accéder à la valeurs des différents paramètres canoniques.

2.5 Influence du facteur de qualité

Le facteur de qualité est un nombre sans dimension qui permet de mesurer l'influence des phénomènes dissipatifs dans l'évolution du système. Plus le facteur de qualité est grand et plus la dissipation est faible.

À ω_0 constant, la durée du régime transitoire est minimale en régime critique.





À retenir : On dit que le système est **faiblement amorti** lorsque Q est supérieur à quelques unités. Dans ce cas :

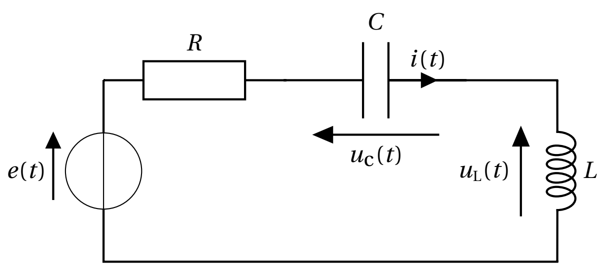
- la pseudopulsation est quasi-égale à la pulsation propre : $\boxed{\omega \simeq \omega_0}$;
- le nombre d'oscillations "visibles" est de l'ordre **du facteur de qualité**.

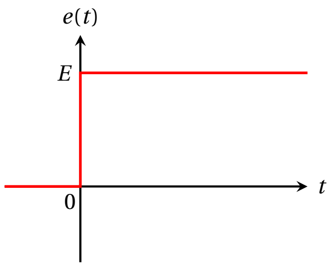
2.6 Étude énergétique

Au cours de la décharge, il y a un transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine. Au cours du temps, l'énergie stockée dans le circuit diminue à mesure que la résistance la dissipe par effet Joule. Selon les valeurs du facteur de qualité :

- En régime pseudopériodique, la dissipation d'énergie est "faible". L'énergie stockée oscille entre sa forme électrique (dans le condensateur) et sa forme magnétique (dans la bobine). Ces oscillations sont amorties à mesure que l'énergie est dissipée dans la résistance,
- en régime critique et apériodique, la dissipation d'énergie est "forte". L'énergie stockée n'a pas le temps d'osciller entre le condensateur et la bobine.

2.7 cas d'un échelon de tension montant





Dans le cas où le système est soumis à un échelon de tension montant l'équation différentielle est légèrement différente :

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = \frac{E}{LC}}$$

La solution de cette équation est de la forme $u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$ où :

- $u_{c,p}(t)$ est une **solution particulière** que l'on cherchera constante (même méthode que pour les équations différentielles déjà vues cette année avec un second membre constant) ;
- $u_{c,h}(t)$ est la solution générale de l'équation homogène, que l'on détermine en utilisant la méthode présentée dans ce chapitre.