

# TD14 : Oscillateur amorti en régime transitoire

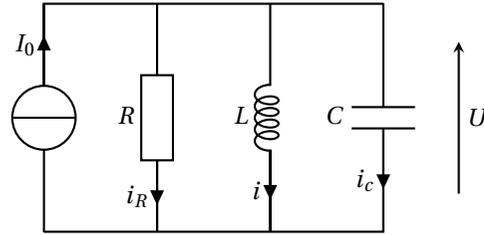
## Exercice 1 : Circuit RLC série en régime transitoire

Un circuit RLC série est alimenté depuis longtemps par une source idéale de tension de fem constante  $E$ . À la date  $t = 0$ , on éteint le générateur.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur.
- On pose  $RC = \frac{2L}{R} = \tau$ . Calculer  $u_c(t)$  puis tracer l'allure de son graphe. Calculer l'intensité  $i(t)$  qui circule dans la maille.
- Même question dans le cas où  $\frac{RC}{2} = \frac{2L}{R} = \tau$ .
- Même question dans le cas où  $\frac{4RC}{5} = \frac{5L}{R} = \tau$ .
- Reprendre toutes les questions précédentes en considérant cette fois-ci que le générateur est éteint depuis longtemps et qu'on l'allume à la date  $t = 0$ .

## ★ Exercice 2 : Circuit RLC parallèle

Une source idéale de courant  $I_0$  alimente le circuit ci-contre, dans lequel la bobine et le condensateur sont parfaits.

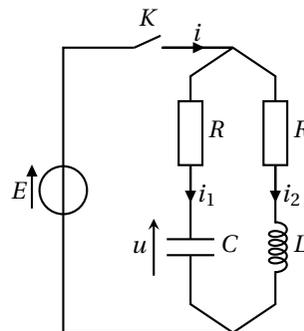


- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  du courant qui traverse la bobine. En déduire l'expression du facteur de qualité  $Q$ .
- On donne  $R = 100\Omega$ ,  $L = 50\text{ mH}$  et  $C = 20\mu\text{F}$ . En quel régime d'amortissement se trouve-t-on ?
- Sachant qu'à  $t = 0$ , le condensateur et la bobine sont déchargés, déterminer  $i(t)$  puis tracer l'allure de son graphe.

## ★ Exercice 3 : Évolution simultanée du courant dans une bobine et un condensateur

Le circuit comporte un condensateur de capacité  $C$  en série avec une résistance  $R$ . Cette branche est en parallèle avec une branche comportant une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R$ . Les valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$  sont telles que  $RC = \frac{L}{R} = \tau$ . L'ensemble est alimenté par un générateur de fem  $E$  comme l'indique le schéma ci-contre.

- Le condensateur et la bobine sont initialement chargés. À  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur  $K$ . Exprimer  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  et  $u$  à  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ .
- Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ .
- Dans quel régime se trouve-t-on ? Exprimer  $u(t)$  à tout instant.



## ★ Exercice 4 : Régime critique

Un condensateur de capacité  $C = 10\mu\text{F}$ , initialement chargé sous une tension  $U_0 = 6\text{V}$ , est connecté à l'instant  $t = 0$  à une bobine de résistance  $R$  et d'inductance  $L = 25\text{ mH}$ .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$  aux bornes du condensateur.
- Le régime étudié est le régime critique. Déterminer  $R$ . Exprimer alors  $u(t)$ . Tracer  $u(t)$ .
- En déduire l'intensité  $i(t)$ . Tracer  $i(t)$ .
- Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$  entre  $t = 0$  et  $t = \infty$  ?

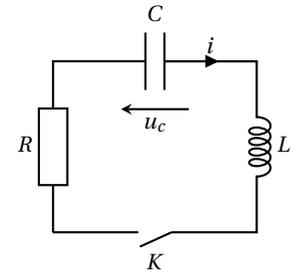
## ★ Exercice 5 : Régime pseudo-périodique

Un condensateur de capacité  $C = 10\mu\text{F}$ , initialement chargé sous une tension  $U_0 = 6\text{V}$ , est connecté à l'instant  $t = 0$  à une bobine de résistance  $R$  et d'inductance  $L = 25\text{ mH}$ . Le régime étudié est pseudo-périodique et la pseudo-période vaut  $T = 5,0\text{ ms}$ .

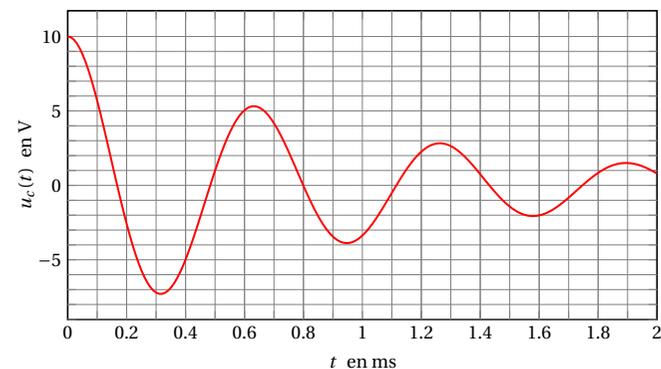
- Déterminer la résistance  $R$ .
- Exprimer  $u(t)$ .

## ★ Exercice 6 : Étude expérimentale

On étudie le circuit RLC série ci-contre. Le condensateur a été chargé, pour  $t < 0$ , par un dispositif non représenté sur ce schéma. À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et on enregistre la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur.



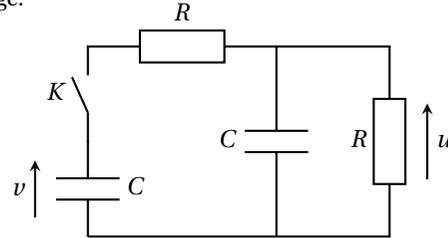
- Déterminer numériquement la pseudopériode  $T$ , le décrément logarithmique  $\delta$ , le coefficient d'amortissement  $\lambda$ , la pulsation propre  $\omega_0$  du signal et le facteur de qualité  $Q$ .
- Sachant que  $R = 100\Omega$ , calculer  $L$  et  $C$ .
- Évaluer numériquement l'énergie qui a été dissipée par effet Joule au cours de la première oscillation.



## TD14 : Oscillateur amorti en régime transitoire

### ★★ Exercice 7 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

À  $t = 0$ , on ferme  $K$ , la tension  $v$  valant  $V_0$  ( $C$  a été chargé, à  $t < 0$ , par un dispositif non représenté), l'autre condensateur de même capacité  $C$  étant déchargé.



1. Établir l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $u(t)$ . On notera  $\tau = RC$ . Dans quel régime se trouve-t-on ?

2. Exprimer  $u(0^+)$ ,  $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+}$  et  $u(\infty)$ .

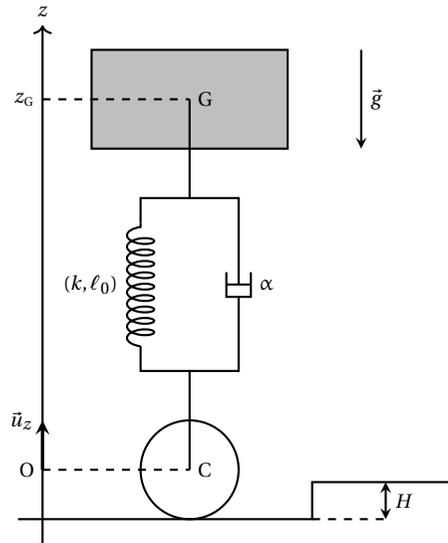
3. Calculer  $u(t)$  puis tracer son graphe.

On notera  $\tau_1 = \frac{2\tau}{3-\sqrt{5}}$  et  $\tau_2 = \frac{2\tau}{3+\sqrt{5}}$ .

### ★★ Exercice 8 : Étude d'une suspension

La suspension d'un véhicule relie une roue, de centre  $C$ , à l'habitacle, de masse totale  $M = 1000$  kg et de centre d'inertie  $G$ . On suppose que l'axe  $CG$  reste toujours vertical. On modélise la suspension par l'association d'un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide  $\ell_0$  et d'un amortisseur qui s'oppose au déplacement relatif de l'habitacle et de la roue en exerçant sur l'habitacle une force proportionnelle à la vitesse, de constante d'amortissement  $\alpha$ . Le mouvement vertical de l'habitacle est repéré par un axe  $(Oz)$  ascendant. La résultante des forces exercées par la suspension sur l'habitacle s'écrit sous la forme:

$$\vec{F} = -k(z_G - z_C - \ell_0)\vec{u}_z - \alpha\left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_C}{dt}\right)\vec{u}_z$$



Dans la première phase du mouvement, le véhicule roule à vitesse constante sur une route plane et horizontale. L'origine de l'axe  $(Oz)$  est défini de telle manière que  $z_C = 0$  pendant cette première phase. À la date  $t = 0$ , la roue rencontre une marche de hauteur  $H$ . On fait l'hypothèse que l'altitude du point  $C$  passe instantanément de  $z = 0$  à  $z = H$  (on néglige la taille de la roue). Dans la deuxième phase du mouvement, le véhicule poursuit son mouvement à vitesse constante sur une route plane et horizontale. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de l'habitacle pour  $t > 0$ .

1. Exprimer la position d'équilibre  $z_{eq}$  du point  $G$ , dans la deuxième phase du mouvement, en fonction de  $H$ ,  $\ell_0$ ,  $M$ ,  $g$  et  $k$ .

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $z_G$ .

3. On pose  $Z = z_G - z_{eq}$ . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $Z$  ?

4. Le constructeur a choisi les paramètres de la suspension de manière à ce que le mouvement de l'habitacle après un obstacle soit le plus court possible lorsque la véhicule roule à vide. Exprimer dans ce cas  $\alpha$  en fonction de  $k$  et  $M$ .

5. Le même véhicule transporte désormais quatre personnes, de masse totale  $m = 300$  kg. Justifier que l'on se trouve désormais en régime pseudopériodique. Exprimer la pseudo-période  $T$  en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $M$ .

6. Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations résultant d'un défaut de la route aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de marche qui vaut environ une seconde. Calculer la raideur du ressort  $k$  et en déduire celle de  $\alpha$ , du facteur de qualité  $Q$  et de la durée  $\tau$  du régime transitoire.

### Solutions :

**Ex1 :** 2.  $u_c(t) = E\left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}$      $i(t) = -\frac{2E}{R}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$

3.  $u_c(t) = E\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$      $i(t) = -\frac{E}{R}te^{-t/\tau}$

4.  $u_c(t) = \frac{E}{3}\left(4e^{-t/\tau} - e^{-4t/\tau}\right)$      $i(t) = \frac{4E}{3R}\left(e^{-4t/\tau} - e^{-t/\tau}\right)$

5.  $u_c(t) = E\left(1 - \left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}\right)$      $i(t) = \frac{2E}{R}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$

$u_c(t) = E\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$      $i(t) = \frac{E}{R}te^{-t/\tau}$

$u_c(t) = E\left(1 - \frac{4}{3}e^{-t/\tau} + \frac{1}{3}e^{-4t/\tau}\right)$      $i(t) = \frac{4E}{3R}\left(e^{-t/\tau} - e^{-4t/\tau}\right)$

**Ex2 :** 1.  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_0}{LC}$  ;  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$     2. régime pseudopériodique

3.  $i(t) = I_0\left[1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\lambda t}\right]$  avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

**Ex3 :** 1.  $u(0^-) = E$  ;  $i(0^-) = i_2(0^-) = \frac{E}{R}$  ;  $i_1(0^-) = 0$      $u(0^+) = E$  ;  $i(0^+) = 0$  ;  $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$  ;  $i_1(0^+) = -\frac{E}{R}$

2.  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$

3. régime critique :  $u(t) = Ee^{-t/\tau}$

**Ex4 :** 2.  $R = 100\Omega$      $u(t) = U_0(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$

3.  $i(t) = -CU_0\lambda^2 te^{-\lambda t}$     4.  $W_j = 0, 18\text{MJ}$ .

**Ex5 :** 1.  $R = 78\Omega$     2.  $u(t) = U_0\left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\lambda t}$  avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

**Ex6 :** 2.  $L = 0, 05\text{H}$  ;  $C = 0, 2\mu\text{F}$  ;  $W_j = 7\mu\text{J}$

**Ex7 :** 1.  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0$  ; régime aperiodique    2.  $u(0^+) = 0$  ;  $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+} = \frac{V_0}{\tau}$  ;  $u(\infty) = 0$

3.  $u(t) = \frac{V_0}{\sqrt{5}}\left[e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right]$

**Ex8 :** 1.  $z_{eq} = H + \ell_0 - \frac{Mg}{k}$     2.  $\ddot{z}_G + \frac{\alpha}{M}\dot{z}_G + \frac{k}{M}z_G = \frac{k}{M}(H + \ell_0) - g$

3.  $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = 0$     4.  $\alpha = 2\sqrt{kM}$     5. régime pseudopériodique :  $T = \frac{2\pi(m+M)}{\sqrt{km}}$

6.  $k = 2, 2 \cdot 10^5 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\alpha = 3, 0 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $Q = 0, 56$  ;  $\tau = 0, 44 \text{s}$