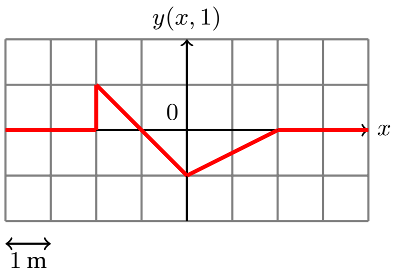
TD12 : Signaux, ondes

Exercice 1 : Représentation spatio-temporelle d'une onde progressive

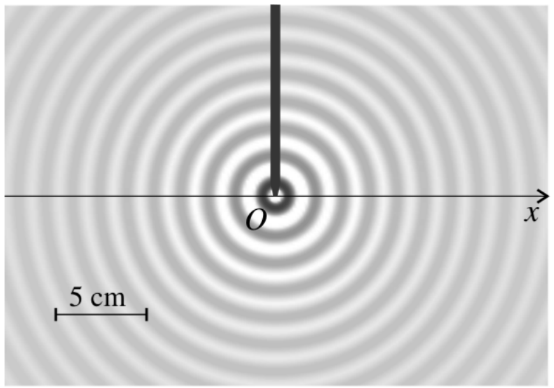


Une onde progressive, caractérisée par la fonction $y(x,t) = f(x - ct)$ se propage le long d'un axe Ox avec une célérité $c = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On représente l'allure de cette onde à la date $t = 1$ s sur le schéma ci-contre.

1. Représenter l'allure de cette onde à la date $t = 3$ s.
2. Représenter l'évolution temporelle $y(1,t)$ du point d'abscisse $x = 1$ m en fonction du temps.
3. Reprendre la question 1 en supposant cette fois que l'onde progressive est du type $f(x + ct)$.

Exercice 2 : Cuve à ondes

La figure représente la surface d'une cuve à onde éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est engendrée par un vibreur de fréquence $f = 18$ Hz. L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe (en bosse), foncée là où elle est concave (en creux).



1. En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.
2. En déduire la célérité de l'onde.
3. On suppose l'onde sinusoïdale, d'amplitude A constante et de phase initiale nulle en O. Écrire le signal $s(x,t)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.
4. Expliquer pourquoi A n'est pas, en fait, constante.

Exercice 3 : Etude des modes propres d'une corde

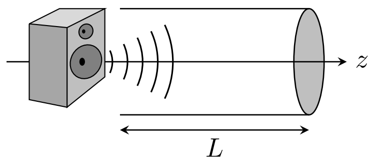
Lors d'une manipulation avec la corde de Melde, on trouve les résultats suivants : pour une même longueur L de la corde et une même masse M accrochée à celle-ci, on mesure une fréquence de $19,0$ Hz pour deux fuseaux et $28,5$ Hz pour trois fuseaux.

1. Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ? Quelles seraient les fréquences suivantes, pour un nombre supérieur de fuseaux ?
2. La longueur de la corde est $L = 117$ cm. Quelle est la célérité d'une onde se propageant sur cette corde ?

⋆ Exercice 4 : Onde progressive sinusoïdale

1. Donner la période, la fréquence, la pulsation, la longueur d'onde, le nombre d'onde et le vecteur d'onde, de l'onde :
$$s(x,t) = 5\sin\left(2,4.10^3\pi t - 7,0\pi x + 0,7\pi\right)$$
où x et t sont exprimés respectivement en mètres et en secondes. Quelle est la valeur de la célérité ?
2. Une onde sinusoïdale se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens positif avec la célérité c. L'expression du signal de l'onde au point d'abscisse x_1 est $s_1(x_1,t) = A\cos(\omega t)$. À l'aide d'un argument physique simple, justifier qu'en un point x quelconque de l'axe (Ox), on peut écrire $s_1(x,t) = s_1(x_1, t-\tau)$. Expliquer le sens physique de τ puis donner son expression en fonction de x et x_1. Exprimer $s_1(x,t)$ puis représenter le graphe de $s_1(x,0)$ en fonction de x.
3. Une onde sinusoïdale se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens négatif avec la célérité c. On donne $s_2(0,t) = A\sin(\omega t)$. Déterminer l'expression de $s_2(x,t)$. Représenter graphiquement $s_2(\frac{\lambda}{4},t)$ et $s_2(\frac{\lambda}{2},t)$.

⋆ Exercice 5 : Réflexion d'une onde progressive sur une paroi élastique



Un haut-parleur est placé à l'entrée d'un tube (voir figure ci-dessus). Il est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω. La célérité des ondes sonores dans l'air est notée c. Une surface réfléchissante placée en bout de cuve en $z = L$ engendre une onde réfléchie.

1. Quelle est la nature de l'onde qui apparaît dans le tube ? Donner son expression générale $p(z,t)$.
2. La surface réfléchissante en $z = 0$ est supposée être un ventre de vibration. En déduire plus précisément l'expression de $p(z,t)$.
3. On souhaite qu'il y ait un noeud de vibration au niveau du haut-parleur. Quelles valeurs doit-on donner à la longueur L du tube ? Les exprimer en fonction d'un nombre entier n et de la longueur d'onde λ.
4. Représenter l'allure de l'onde pour les trois plus petites valeurs de L.

⋆⋆ Exercice 6 : Corde de guitare

Une corde de guitare en acier assimilée à un cylindre de diamètre D , de longueur $L = 64\,\mathrm{cm}$ et de masse volumique $\rho = 7800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ est fixée en ses deux extrémités.

1. La célérité d'une onde se propageant sur une corde dépend de la tension T (homogène à une force) exercée sur la corde et de sa masse linéique μ (masse par unité de longueur) selon la loi : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Vérifier l'homogénéité de cette loi.
2. En imposant une tension $T = 486\,\mathrm{N}$ à cette corde, elle produit un La_3 $(f = 440\,\mathrm{Hz})$.

a) Rappeler à quel mode de vibration correspond la fréquence f. Exprimer la relation entre c et f.

b) La relation entre la masse linéique et la masse volumique de la corde s'écrit : $\mu = \pi r^2 \rho$ où r est le rayon de la corde. Déterminer numériquement le diamètre de la corde.

3. À quel endroit de la corde faut-il appuyer pour produire un Re_4, de fréquence $f = 587\,\mathrm{Hz}$?
4. La masse linéique de la corde est définie par le rapport de sa masse m et de sa longueur L : $\mu = \frac{m}{L}$. Démontrer la relation $\mu = \pi r^2 \rho$.

⋆⋆ Exercice 7 : Corde de Melde

Une corde de Melde de longueur utile L est tendue entre un vibreur, en $x = 0$, et une poulie, en $x = L$. Le vibreur a un mouvement vertical sinusoïdal de pulsation ω:

$$y_{\text{vibreur}} = a\cos(\omega t)$$

On cherche la déformation de la corde sous la forme d'une onde stationnaire :

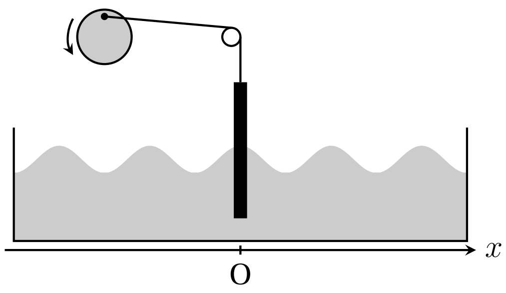
$$y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

où A, φ et ψ sont des constantes à déterminer et où k est le nombre d'onde associé à la pulsation ω.

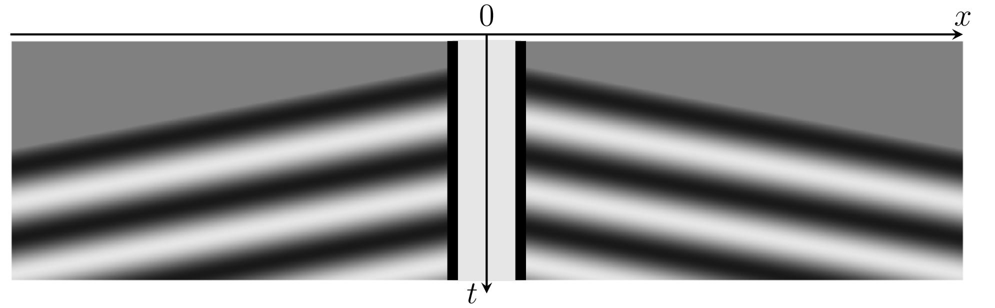
1. Ecrire les conditions aux limites.
2. En déduire l'expression de A, φ et ψ.
3. Que se passe-t-il si le vibreur oscille à l'une des fréquences propres de la corde ?

⋆⋆ Exercice 8 : Canal à houle

Un canal à houle est une cuve rectangulaire de grande longueur comparée à sa largeur, remplie d'eau. Dans cette expérience des vagues sont créées au centre du canal par une plaque à laquelle on impose des oscillations sinusoïdales et qui entraîne l'eau autour d'elle par viscosité (voir schéma ci-contre). On suppose que les vagues se propagent uniquement le long de l'axe $(\mathrm{O}x)$.



Le graphe ci-dessous permet de représenter la propagation des vagues. La position d'un point de la cuve est donnée en abscisse et la date en ordonnée. La hauteur de la surface libre est représentée par un code couleur ; clair au niveau d'un sommet et sombre au niveau d'un creux. Les limites du graphe sont $-50\,\mathrm{cm} \leq x \leq 50\,\mathrm{cm}$ et $0 \leq t \leq 3\,\mathrm{s}$. La bande centrale correspond à l'espace occupé par la plaque oscillante.



1. Proposer une interprétation des lignes obliques situées de part et d'autre de la bande centrale.

2. Déterminer, à partir de ce schéma, la fréquence f des oscillations de la plaque.

3. De la même manière, déterminer la longueur d'onde λ des vagues.

4. Estimer la célérité c de ces vagues.

Solutions :

<u>**Ex2**</u> : 1. $\lambda = 1,5\,\mathrm{cm}$ 2. $c = 0,27\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
3. pour $x > 0$: $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ pour $x < 0$: $s(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$

<u>**Ex3**</u> : 2. $c = 22,2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

<u>**Ex4**</u> : 1. $\omega = 7,5\times 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $f = 1,2\times 10^3\,\mathrm{Hz}$, $T = 8,3\times 10^{-4}\,\mathrm{s}$, $\lambda = 0,29\,\mathrm{m}$, $\sigma = 3,5\,\mathrm{m^{-1}}$, $k = 22\,\mathrm{rad\cdot m^{-1}}$
$c = 3,4\times 10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 2. $s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + kx_1)$ 3. $s_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx)$

<u>**Ex5**</u> : 2. $p(z,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\sin(kz)$ 3. $L = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$

<u>**Ex6**</u> : 2. $D = 0,5\,\mathrm{mm}$ 3. La nouvelle longueur vibrante vaut $L' = 48\,\mathrm{cm}$

<u>**Ex7**</u> : 1. $y(0,t) = y_{\text{vibreur}}(t)$ et $y(L,t) = 0$ 2. $\varphi = 0\ [\pi]$, $\psi = \frac{\pi}{2} - kL\ [\pi]$, $A = \frac{a}{|\sin(kL)|}$
3. L'amplitude des oscillations devient infinie

<u>**Ex8**</u> : 2. $f = 1,1\,\mathrm{Hz}$ 3. $\lambda = 39\,\mathrm{cm}$ 4. $c = 0,43\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$