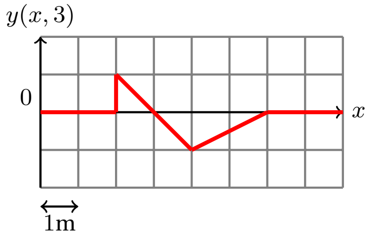
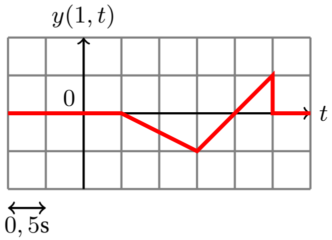
TD12 : Signaux, ondes - corrigé

Exercice 1 : Représentation spatio-temporelle d'une onde progressive

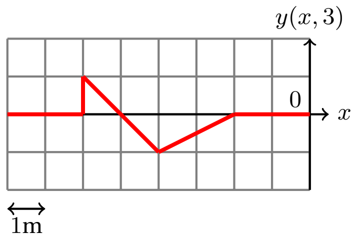
1.



2.



3.



Exercice 2 : Cuve à ondes

1. Pour gagner en précision, on mesure la valeur de 11 longueurs d'onde. On obtient $11\lambda = 16,5\,\mathrm{cm} \iff \boxed{\lambda = 1,5\,\mathrm{cm}}$.

2. La célérité de l'onde vaut $\boxed{c = \lambda f = 0,27\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

3. Pour $x > 0$, l'onde est progressive, sinusoïdale et se propage dans le sens des x croissants. Pour $x < 0$, c'est la même chose mais l'onde se propage dans le sens des x décroissants :

$$\boxed{\begin{cases} s(x,t) = A\cos(\omega t - kx) & x > 0 \\ s(x,t) = A\cos(\omega t + kx) & x < 0 \end{cases}}$$

4. Le **front d'onde** (ensemble des points qui vibrent en phase) est **circulaire**. Au cours de la propagation, le front d'onde se dilate (le périmètre est proportionnel au rayon), donc l'énergie transportée par l'onde s'étale sur une distance de plus en plus grande. Cela implique qu'en un point du front d'onde, l'amplitude décroît au cours de la propagation.

Exercice 3 : Etude des modes propres d'une corde

1. On constate que $\frac{28,5}{3} = 9,5\,\mathrm{Hz}$ et $\frac{19}{2} = 9,5\,\mathrm{Hz}$. Les deux fréquences mesurées sont compatibles avec onde stationnaire dont **la fréquence fondamentale serait égale à** $\boxed{f_1 = 9,5\,\mathrm{Hz}}$.

Pour un nombre quelconque n de fuseaux, la fréquence mesurée serait égale à $\boxed{nf_1}$.

2. La fréquence fondamentale d'une corde vibrante fixée en ses extrémités est reliée à la célérité de la manière suivante :

$$f_1 = \frac{c}{2L} \iff \boxed{c = 2Lf_1 = 22,2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

⋆ Exercice 4 : Onde progressive sinusoïdale

1. On reconnaît, par identification avec la forme générale d'une onde progressive sinusoïdale $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$, que :

$$\boxed{\omega = 2,4\cdot 10^3\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{k = 7,0\pi\,\mathrm{rad\cdot m^{-1}}}$$

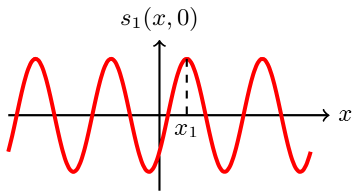
On en déduit ensuite toutes les autres grandeurs :

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,2\,\mathrm{kHz}} \quad \boxed{T = \frac{1}{f} = 0,83\,\mathrm{ms}} \quad \boxed{\sigma = \frac{k}{2\pi} = 3,5\,\mathrm{m^{-1}}} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{\sigma} = 29\,\mathrm{cm}}$$

2. Entre les points d'abscisses x_1 et x, l'onde met un temps $\tau = \frac{x-x_1}{c}$ à se propager. Par conséquent, **la vibration que l'on observe en x, à la date t est la même vibration que celle que l'on observe en x_1 à la date $t-\tau$**. Mathématiquement, cela revient à dire que :

$$s_1(x,t) = s_1(x_1, t-\tau) = A\cos(\omega(t - \tfrac{x-x_1}{c})) \iff \boxed{s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + kx_1)}$$

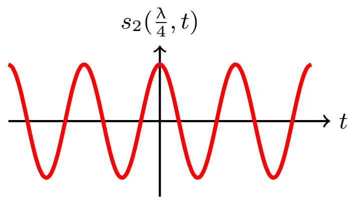
On représente ci-dessous l'allure de la fonction $s_1(x,0) = A\cos(-kx + kx_1) = A\cos(kx - kx_1)$.

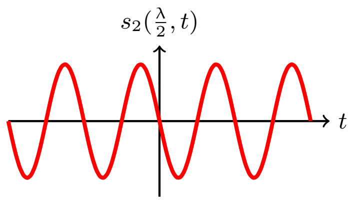


3. Par analogie avec la question précédente, le temps mis par l'onde pour se propager de l'abscisse $x = 0$ vers un point d'abcisse $x < 0$ vaut $\tau = -\frac{x}{c}$. Par conséquent :

$$s_2(x,t) = s_2(0, t-\tau) = A\sin(\omega(t + \tfrac{x}{c})) \iff \boxed{s_2(x,t) = A\sin(\omega t + kx)}$$

On représente ci-dessous l'allure de la fonction $s_2(\frac{\lambda}{4},t) = A\sin(\omega t + \frac{k\lambda}{4}) = A\sin(kx+\frac{\pi}{2}) = A\cos(kx)$. On représente également la fonction $s_2(\frac{\lambda}{2},t) = A\sin(kx+\pi) = -A\sin(kx)$.





⋆ Exercice 5 : Réflexion d'une onde progressive sur une paroi élastique

1. Il apparaît dans le tube une **onde stationnaire**, qu'on écrit sous sa forme la plus générale :

$$\boxed{p(z,t) = A\sin(\omega t+\varphi)\sin(kz+\psi)}$$

2. Il y a un ventre de vibration en $z=L$, ce qui signifie que :

$$\sin(kL+\psi) = \pm 1 \iff kL+\psi = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\iff \psi = \frac{\pi}{2} - kL\ [\pi]$$

On simplifie l'expression de $p(z,t)$:

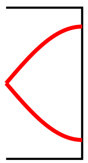
$$\boxed{p(z,t) = A\sin(\omega t+\varphi)\cos(k(z-L))}$$

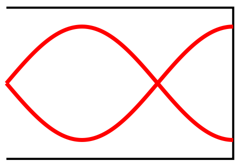
3. Il y a un nœud au niveau du haut-parleur si $p(0,t)=0\ \forall t$. Autrement dit :

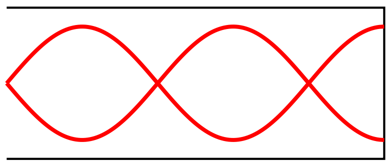
$$\cos(kL) = 0 \iff kL = (2n-1)\tfrac{\pi}{2}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$$

En exploitant $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, on aboutit à l'expression suivante : $\boxed{L = \dfrac{(2n-1)\lambda}{4}}$.

4. On représente ci-dessous l'allure de l'onde pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$:


$L=\frac{\lambda}{4}$


$L=\frac{3\lambda}{4}$


$L=\frac{5\lambda}{4}$

⋆⋆ Exercice 6 : Corde de guitare

1. $\left[\frac{T}{\mu}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{ML^{-3}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\mathrm{L^2T^{-2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{LT^{-1}}$. L'équation est bien homogène.

2.a) La fréquence de vibration d'une corde fixée en ses extrémiés est sa **fréquence fondamentale**. Cette fréquence vaut $\boxed{f = \dfrac{c}{2L}}$ (voir démo du cours).

2.b) La célérité de la corde permet de relier la fréquence de vibration à la masse linéique :

$$c = 2fL = \sqrt{\tfrac{T}{\mu}} \iff \mu = \tfrac{T}{4f^2L^2}$$

Sachant que par ailleurs, $\mu = \pi r^2\rho = \frac{\pi D^2\rho}{4}$, on en déduit l'expression du diamètre de la corde :

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{T}{\pi f^2L^2\rho}} = 0,50\,\mathrm{mm}}$$

3. Pour produire un son de fréquence $f' = 587$ Hz supérieure à celle du La$_3$, il faut réduire la longueur vibrante de la corde. La nouvelle longueur à donner vaut :

$$\boxed{L' = \frac{c}{2f'} = \frac{f}{f'}L = 48\,\mathrm{cm}}$$

Il faut pincer la corde **aux trois-quart du manche, à 48 cm du chevalet**.

4. La corde, de forme cylindrique (rayon r et hauteur L), possède un volume $V=\pi r^2L$. Par définition de la masse volumique et de la masse linéique, la masse totale de la corde s'écrit des deux manière suivantes :

$$m = \rho V = \mu L \iff \boxed{\mu = \frac{V}{L}\rho = \pi r^2\rho}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Corde de Melde

1. Les conditions limites s'écrivent : $\boxed{y(0,t) = a\cos(\omega t)}$ et $\boxed{y(L,t) = 0\ \forall t}$.

2. La condition limite en $x=L$ implique :

$$\cos(kL+\psi) = 0 \iff \boxed{\psi = \frac{\pi}{2} - kL\ [\pi]}$$

On en déduit que $y(x,t) = A\cos(\omega t+\varphi)\sin[k(L-x)]$.

La condition limite en $x=0$ implique :

$$A\sin(kL)\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t)\,\forall t \iff \boxed{\varphi = 0\ [\pi]} \text{ et } A\,|\sin(kL)| = a$$

L'amplitude des oscillations de la corde de Melde vaut $\boxed{A = \dfrac{a}{|\sin(kL)|}}$.

3. Les fréquences propres de vibration de la corde de Melde vérifient $kL = 0 \ [\pi]$ (voir cours). Dans ce cas, $\sin(kL) = 0$ et **l'amplitude de vibration devient infinie**!

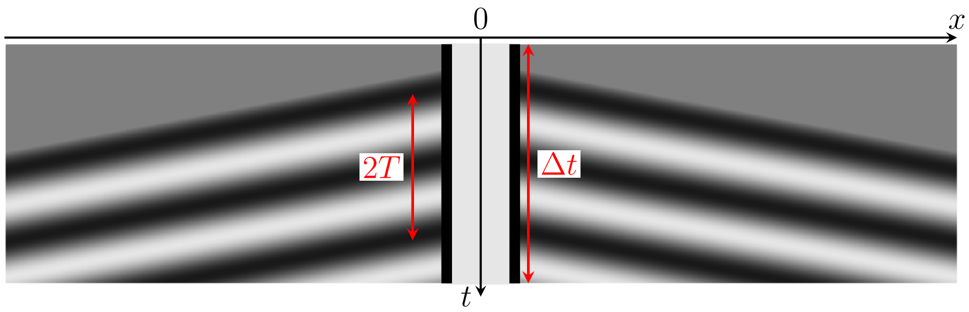
Rq : En réalité, l'amplitude de vibration est limitée car, pour des vibrations d'amplitude élevée, la forme de l'onde n'est plus sinusoïdale (même si le vibreur oscille de manière sinusoïdale) et le raisonnement précédent n'est plus valable. Il existe par ailleurs des sources de dissipation d'énergie (production d'une onde acoustique, frottements internes à la corde, etc.)

⋆⋆ Exercice 8 : Canal à houle

1. En tout point d'une ligne oblique, l'état vibratoire (donc la phase de l'onde) est le même. Par conséquent, ces lignes permettent d'observer la propagation dans l'espace et le temps d'une crête s'éloignant de la plaque.

- sur une ligne horizontale, la distance qui sépare les centres de deux lignes obliques sombres consécutives représente la période spatiale de l'onde, c'est-à-dire sa longueur d'onde.
- sur une ligne verticale, la distance qui sépare les centres de deux lignes obliques sombres consécutives représente la période temporelle de l'onde.

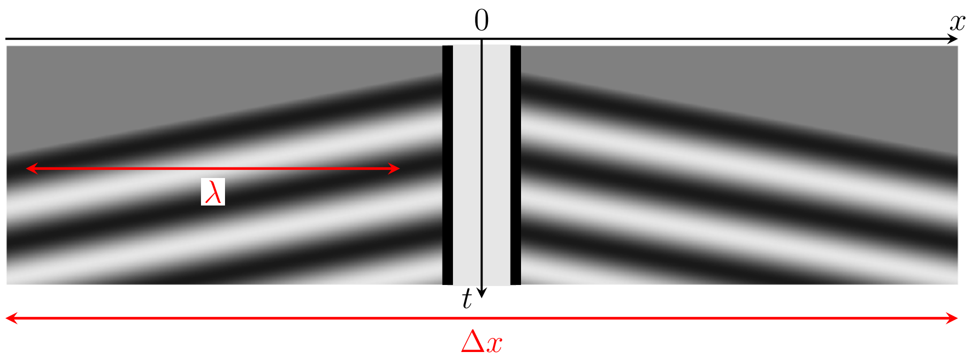
2. La durée totale affichée est $\Delta t = 3\,\text{s}$. En comparant la distance verticale qui sépare les centres de deux lignes obliques sombres consécutives à la distance qui sépare les deux extrémités verticales du graphe on peut en déduire la valeur de la période temporelle, donc de f (on mesure deux périodes pour une meilleure précision).



$$\frac{2T}{\Delta t} \simeq 0,61 \iff T = 0,92\,\text{s} \iff \boxed{f = 1,1\,\text{Hz}}$$

3. La dimension horizontale de l'image vaut $\Delta x = 1,0\,\text{m}$. En comparant la distance horizontale qui sépare les centres de deux lignes obliques sombres consécutives à Δx on peut déterminer la longueur d'onde (voir page suivante).

$$\frac{\lambda}{\Delta x} \simeq 0,39 \iff \boxed{\lambda = 39\,\text{cm}}$$



4. La célérité des vagues vaut : $\boxed{c = \lambda f = 0,43\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.