Autocorrection entraînement DS4*

Exercice 1 : Masse en rotation dans une cuvette parabolique

1. $\boxed{E = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz}$.

2. Projection du PFD sur $\vec{u}_\theta$:

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \iff r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\left(r^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} = 0 \iff \boxed{r^2\dot{\theta} = \text{Cste} = r_0 v_0 = \sqrt{\frac{z_0}{K}}v_0}$$

3. On exploite la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$$

avec $r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{C^2}{r^2} = \dfrac{z_0}{z}v_0^2$. On cherche à déterminer les valeurs extrémales de $z(t)$, autrement les valeurs de z telles que $\dot{z} = 0$. Comme r et z sont liés si $\dot{z} = 0$ alors $\dot{r} = 0$ aussi. Les valeurs extrémales de $z(t)$ sont donc telles que :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}m \times \frac{z_0}{z}v_0^2 + mgz$$

Après quelques simplifications on obtient l'équation du second degré attendue.

4. Les racines sont $\boxed{z_1 = z_0}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{v_0^2}{2g}}$. Suivant que $v_0 < \sqrt{2gz_0}$ ou bien $v_0 > \sqrt{2gz_0}$ la masselotte se déplacera toujours en-dessous ou bien toujours au-dessus de z_0. Dans le cas particulier où $\boxed{v_0 = \sqrt{2gz_0}}$ alors z_0 est une racine double de l'équation donc elle est à la fois borne inférieure et borne supérieure de $z(t)$; la masse voyage à l'altitude z_0 constante donc sa trajectoire est circulaire.

5. On note α l'inclinaison de la réaction normale $\vec{N}$ de la cuvette par rapport à la verticale. Comme $\vec{N}$ est normale au support cet angle est également celui entre la tangente à la parabole et l'horizontale et vérifie :

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = 2Kr = \frac{2z}{r} \ll 1$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé cet angle est très faible et l'on peut faire les développements au premier ordre suivants :

$$\tan\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \alpha \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha \simeq 1$$

On projette alors le PFD sur $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = -mg + \left\|\vec{N}\right\|\cos\alpha$$

Comme le déplacement vertical de la masse est très faible on peut négliger $m\ddot{z}$ devant mg et $\left\|\vec{N}\right\|$, si bien qu'au premier ordre on obtient bien $\boxed{\left\|\vec{N}\right\| = mg}$.

6. On projette la réaction normale sur $\vec{u}_r$:

$$\vec{N}_\mathrm{H} = -\left\|\vec{N}\right\|\sin\alpha\vec{u}_r \simeq -mg\alpha\vec{u}_r = \boxed{-2Kmgr\vec{u}_r}$$

7. La réaction horizontale s'écrit $\vec{N}_\mathrm{H} = -2Kmgr\vec{u}_r = -2Kmg(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$. On projette le PFD sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ et on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2Kgx = 0 \\ \ddot{y} + 2Kgy = 0 \end{cases}$$

Les conditions initiales pour la coordonnée x sont $x(0) = \sqrt{\frac{z_0}{K}}$ et $\dot{x}(0) = 0$. Les solutions de ces équations sont alors :

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{z_0}{K}}\cos(\omega_0 t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{2Kg}$. Ces coordonnées vérifient l'équation cartésienne suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \sqrt{\frac{z_0}{K}}$ et $b = v_0/\omega_0$. C'est l'équation cartésienne d'une ellipse d'axes (Ox) et (Oy). Dans le cas particulier où :

$$a = b \iff v_0 = \omega_0\sqrt{\frac{z_0}{K}} = \sqrt{2gz_0}$$

l'ellipse est en fait un cercle. On retrouve le résultat de la question 4.

8. La force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ n'a pas de composante sur $\vec{u}_z$; le mouvement vertical n'est pas altéré par la présence du champ magnétique.

9. On projette le PFD sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ pour obtenir :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2Kgx + qB_0\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -2Kgy - qB_0\dot{x} & (2) \end{cases}$$

En écrivant $(1) + \mathrm{i}(2)$ on trouve l'équation attendue avec $\boxed{\omega_L = \frac{qB_0}{m}}$ (attention pas forcément positif) et à nouveau $\boxed{\omega_0 = \sqrt{2Kg}}$.

10. On utilise la formule d'Euler pour établir que :

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left[Z(t)\right] = a\left[\cos(\omega_L t)\cos(\omega t) - \frac{\omega_L}{\omega}\sin(\omega_L t)\sin(\omega t)\right]}$$

$$\boxed{y(t) = \mathrm{Im}\left[Z(t)\right] = a\left[\sin(\omega_L t)\cos(\omega t) + \frac{\omega_L}{\omega}\cos(\omega_L t)\sin(\omega t)\right]}$$

11.
```
x = a * (np.cos(omega_L * t) * np.cos(omega * t) + (omega_L / omega) * np.sin(
    omega_L * t) * np.sin(omega * t))
y = a * (np.sin(omega_L * t) * np.cos(omega * t) - (omega_L / omega) * np.cos(
    omega_L * t) * np.sin(omega * t))

# Calcul et affichage de la figure
plt.figure(figsize=(5,5))
plt.plot(x, y)
```

Exercice 2 : Gravimétrie interférentielle

1. On détermine l'altitude du miroir (avec le PFD par exemple) : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$. On détermine ensuite la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent au niveau de la photodiode (celui qui se propage en ligne droite et celui qui se réfléchit sur le miroir).

$$\delta = 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + z^2} - L = L\left(\sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}} - 1\right)$$

Au vu des durées correspondant aux premières annulations de l'intensité lumineuse on peut considérer que le déplacement du miroir est très faible soit $z \ll L$. On peut alors faire l'approximation :

$$\sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}} \simeq 1 + \frac{2z^2}{L^2} \implies \boxed{\delta \simeq \frac{2z^2}{L} = \frac{g^2t^4}{2L}}$$

2. À la première annulation de l'intensité lumineuse on a $\delta = \lambda/2$. Connaissant δ, t (mesuré sur le graphe) et L on peut en déduire g. On trouve $\boxed{g = 9,74\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}$.

3. Désormais la position du miroir est $z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ et l'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2z^2}{\lambda L} = \frac{2}{\lambda L}\left(z_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\right)^2$$

On peut alors écrire pour les points A, B et C le système :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{2}{\lambda L}\left(z_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2\right)^2 & (1) \\ p_2 = \frac{2}{\lambda L}\left(z_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2\right)^2 & (2) \\ p_2 = \frac{2}{\lambda L}\left(z_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2\right)^2 & (3) \end{cases}$$

Ce système possède trois inconnues : z_0, v_0 et g. En éliminant z_0 et v_0 on aboutit à la formule demandée.