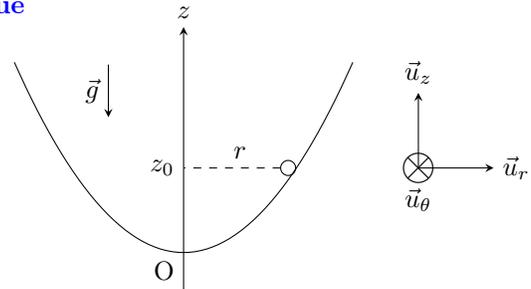


Entraînement DS4*

Exercice 1 : Masse en rotation dans une cuvette parabolique

Une masselotte ponctuelle m peut glisser à l'intérieur d'une cuvette de forme parabolique d'équation $z = Kr^2$. On étudie son mouvement dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ représentée sur la figure ci-contre. Elle est lancée horizontalement avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_\theta$ depuis un point d'altitude z_0 mesurée par rapport à la position d'équilibre O du système. On néglige tout frottement.



- Exprimer l'énergie mécanique de la masselotte d'abord en fonction des conditions initiales, puis en fonction des coordonnées cylindrique r, θ, z et leur dérivée.
- À l'aide du PFD montrer qu'au cours du mouvement $r^2\dot{\theta} = \text{Cste}$. On note C cette constante, l'exprimer en fonction de K, z_0 et v_0 .
- Montrer que le mouvement de la masselotte est borné entre deux altitudes qui sont solutions de l'équation :

$$z^2 - \left(\frac{v_0^2}{2g} + z_0\right)z + \frac{v_0^2}{2g}z_0 = 0$$

- Déterminer les deux bornes pour l'altitude z . Montrer que pour une valeur particulière de v_0 le mouvement est circulaire.

Dans la suite de cet exercice on s'intéresse aux petits mouvements de la masselotte autour de O, ce qui revient à se placer dans l'approximation $z \ll r$.

- Montrer qu'au premier ordre en z/r la réaction du support vérifie $\|\vec{N}\| = mg$.
- Montrer alors, toujours au premier ordre en z/r , que la composante horizontale de la réaction du support s'écrit $\vec{N}_H = -2Kmgr\vec{u}_r$.

On se place désormais dans un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ défini de sorte que $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0$.

- Établir les équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$. Les résoudre et montrer que le mouvement horizontal de la masselotte est elliptique.

On considère maintenant que la masselotte possède une charge électrique q et que l'ensemble du système est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ (le poids n'est pas négligé). Elle est lâchée sans vitesse initiale depuis le point de la cuvette de coordonnées $x(0) = a$ et $y(0) = 0$.

- Justifier que les propriétés du mouvement vertical étudiées dans les questions 1 à 4 se conservent en présence du champ magnétique.
- Établir les équations différentielles couplées vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$.

On pose la variable complexe $Z(t) = x(t) + iy(t)$ où i est le nombre imaginaire défini par $i^2 = -1$. Montrer que $Z(t)$ est solution de l'équation

$$\ddot{Z} + 2i\omega_L\dot{Z} + \omega_0^2Z = 0$$

où ω_L et ω_0 sont à déterminer.

- On admet la solution de cette équation : $Z(t) = ae^{i\omega_L t} (\cos(\omega t) - i\frac{\omega_L}{\omega} \sin(\omega t))$ où $\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$. Donner les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

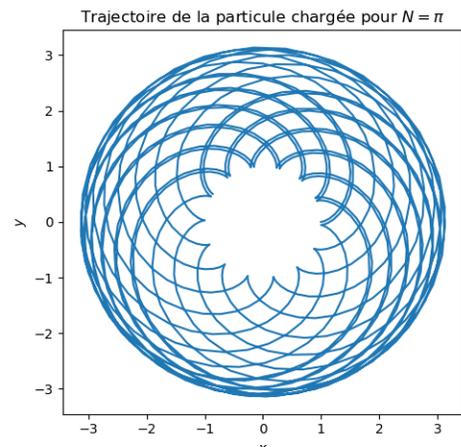
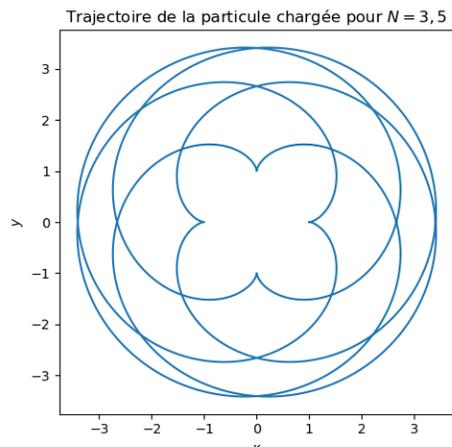
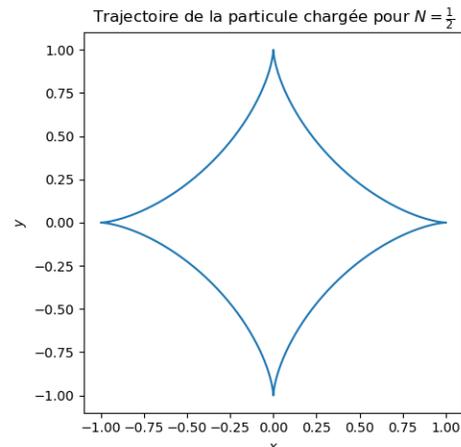
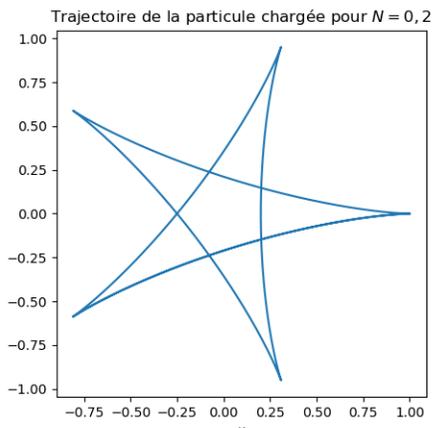
11. On souhaite afficher l'allure de la trajectoire avec Python, avec un jeu de paramètres arbitrairement choisis. Complétez les lignes 15, 16 et 20 du script ci-dessous.

```

1 # importation des bibliothèques utiles
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 # valeurs des paramètres
6 a = 1 # amplitude du mouvement
7 N = 2 # rapport des pulsations
8 omega = 2 * np.pi
9 omega_L = N * omega
10
11 # tableau des dates
12 t = np.linspace(0, 10, 1000)
13
14 # tableaux des coordonnées
15 x = ###
16 y = ###
17
18 # Calcul et affichage de la figure
19 plt.figure(figsize=(4,4))
20 plt.plot(###)
21 plt.xlabel(r'$x$')
22 plt.ylabel(r'$y$')
23 plt.title("Trajectoire de la particule chargée")
24 plt.show()

```

On représente ci-dessous quelques allures de trajectoires pour des valeurs différentes du rapport $N = \omega_L/\omega$. On peut démontrer que la trajectoire de la particule est fermée sur-elle-même (c'est-à-dire périodique) à condition que N soit un **nombre rationnel**. Dans le cas contraire la trajectoire est ouverte, ce qui signifie que la particule ne repasse jamais deux fois au même endroit avec le même vecteur vitesse.



Exercice 2 : Gravimétrie interférentielle

L'instrument de mesure du champ de pesanteur est un gravimètre. Aujourd'hui, les gravimètres procèdent généralement par mesure du temps de chute d'un objet dans le vide : le temps de parcours d'une distance donnée permet d'accéder directement à la valeur de l'accélération de la pesanteur g . L'objet utilisé est généralement un catadioptré, les mesures de distance étant réalisées à l'aide d'un laser dans un interféromètre. Dans le gravimètre à chute de coin de cube représenté figure 13, la photodiode reçoit deux faisceaux lumineux : l'un est issu directement du laser, l'autre a été réfléchi successivement par le coin de cube en chute libre et par le coin de cube de référence. Ces deux faisceaux interfèrent.

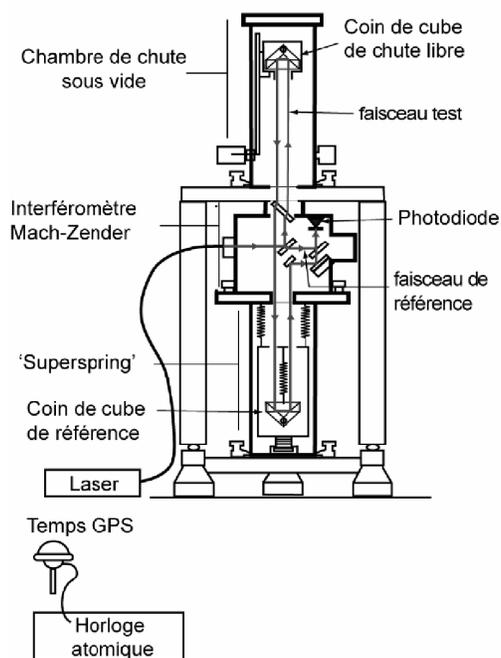
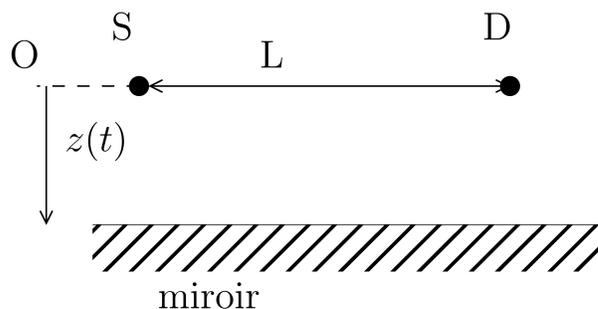


Figure 13 Gravimètre à chute de coin de cube

Les deux faisceaux lumineux reçus par la photodiode sont supposés avoir la même intensité I_0 . L'intensité lumineuse reçue par la photodiode est convertie en un signal électrique.

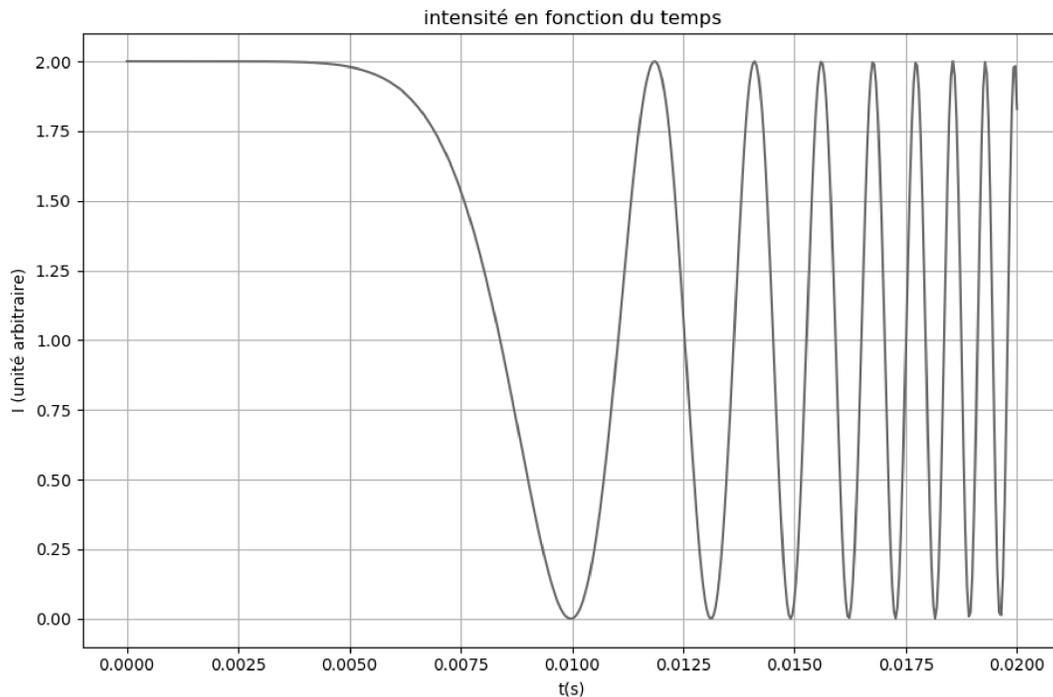
Dans un premier temps on modélise de façon simplifiée le dispositif à l'aide du schéma ci-dessous. La source S est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. La distance entre la source et le détecteur vaut $L = 1,50 \text{ m}$. À l'instant initial le miroir est à l'altitude $z = 0$, il est lâché sans vitesse initiale. On admet qu'un dispositif non représenté sur le schéma compense le déphasage de π produit par la réflexion de l'onde lumineuse sur le miroir plan, on n'en tiendra donc pas compte ici.



1. Exprimer la différence de marche au niveau de la photodiode sous la forme $\delta = \alpha t^4$ où α est à exprimer en fonction de g et L .

On utilisera pour cela le développement au premier ordre suivant : $(1 + \varepsilon)^\beta \simeq 1 + \beta\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$. On justifiera l'approximation au regard du graphe montré en question 2.

2. Une simulation informatique de la tension détectée est représentée ci-dessous. Montrer que l'on peut déterminer g . Faire l'application numérique.



Dans la pratique, il est difficile de connaître avec précision la position et la vitesse du coin de cube à la date $t = 0$. On emploie alors une méthode basée sur la mesure des ordres d'interférence p_1, p_2, p_3 en trois points A, B, C repérés à trois dates successives quelconques, t_1, t_2 et t_3 (figure 15).

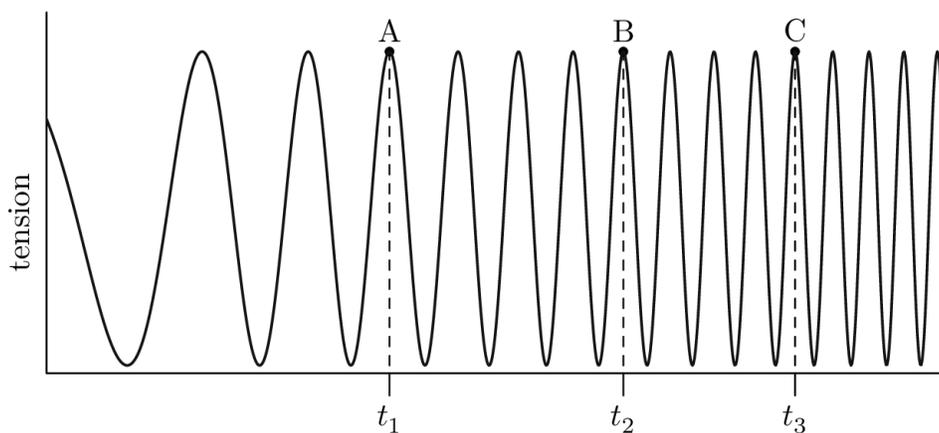


Figure 15 Exploitation de la courbe de tension

3. On se place dans la situation où le miroir a une position initiale z_0 et une vitesse v_0 non nulles et inconnues. Établir que :

$$g = \frac{\sqrt{2\lambda L}(\sqrt{p_3} - \sqrt{p_1})(t_2 - t_1) - (\sqrt{p_2} - \sqrt{p_1})(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$