Correction du DNS 14

EXERCICE 1

($\Rightarrow$) Supposons que $A \subset B \subset C$. L'inclusion $A \subset B$ implique que $A \cup B = B$, et l'inclusion $B \subset C$ implique que $B \cap C = B$. Ainsi $A \cup B = B \cap C$.

($\Rightarrow$) Supposons que $A \cup B = B \cap C$. On a, d'une part, $A \subset A \cup B$ donc $A \subset B \cap C \subset B$ et, d'autre part, $B \subset A \cup B$ donc $B \subset B \cap C \subset C$. Ainsi $A \subset B \subset C$.

L'équivalence est établie.

EXERCICE 2

Supposons $g \circ f$ injective et f surjective. Montrons que g est injective.

Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Puisque f est surjective, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. On a donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, i.e. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Or $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$ et par suite $f(x_1) = f(x_2)$ d'où $y_1 = y_2$.

L'application g est bien injective.

EXERCICE 3

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ et, pour tout $x \neq -d/c$ on a

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Si $ad - bc = 0$, la fonction est constante égale à b/d.

Si $ad - bc > 0$, la fonction est strictement croissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$. En $-d/c$ elle tend vers $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite.

Si $ad - bc < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, -d/c[$ et sur $]-d/c, +\infty[$. En $-d/c$ elle tend vers $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite.

Enfin $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{x(a + b/x)}{x(c + d/x)} = \dfrac{a + b/x}{c + d/x}$ tend vers a/c en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Soit $x \neq -d/c$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{ax + b}{cx + d} = x \Leftrightarrow ax + b = cx^2 + dx \Leftrightarrow cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

C'est une équation du second degré : elle a au plus deux solutions réelles. Ainsi f admet au plus deux points fixes.

2) a) D'après l'étude menée en 1)a) la fonction f est strictement décroissante sur $]-2, +\infty[$ et elle tend vers 1 en $+\infty$. Par conséquent $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$.

C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [1, +\infty[$. Alors $u_n \neq -2$, donc on peut calculer u_{n+1}, et $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ donc $u_{n+1} \in [1, +\infty[$.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

b) On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -3).$$

La fonction f a donc deux points fixes : -3 et 2.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2} + 3}{\frac{u_n+6}{u_n+2} - 2} = \frac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n + 6 - 2u_n - 4} = \frac{4u_n + 12}{-u_n + 2} = -4\frac{u_n + 3}{u_n - 2} = -4v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison -4.

d) On en déduit que $v_n = v_0(-4)^n = (-4)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n + 3 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2(-4)^{n+1} + 3}{(-4)^{n+1} - 1},$$

et donc
$$u_n = \frac{2+3/(-4)^{n+1}}{1-1/(-4)^{n+1}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

3) a) D'après l'étude menée en 1)a) la fonction f est strictement croissante sur $]1/2,+\infty[$. Par conséquent $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [1, 4/3] \subset [1, 2]$.

En raisonnant comme en 2)a) on en déduit que la suite (u_n) est à valeurs dans $[1, 2]$ (elle est donc bien définie car u_n n'est jamais égal à $1/2$).

b) On a :
$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

La fonction f a donc un seul point fixe : 1.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2}{2u_n-1}-1} = \frac{2u_n-1}{3u_n-2-2u_n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n-1} = \frac{2u_n-2+1}{u_n-1} = 2+\frac{1}{u_n-1} = 2+v_n$$

donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

On en déduit que $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :
$$v_n = \frac{1}{u_n-1} \Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2n+1} + 1 = \frac{2n+2}{2n+1}.$$