Devoir n°17 (non surveillé)

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ puis étudier sa continuité et sa dérivabilité.

EXERCICE 2 - Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$(*) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

3) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.

4) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, r \in \mathbb{Q}, f(rx) = rf(x)$. On pourra poser $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et considérer $f(px)$.

5) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = xf(y)$. On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers x.

6) En déduire finalement qu'il existe un réel a tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

7) Réciproquement, montrer que les fonctions de la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$.

EXERCICE 3 - Applications du théorème de Cesàro

On rappelle le théorème de Cesàro : si une suite réelle (u_n) converge vers ℓ, alors la suite de terme général $\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ.

1) (*Difficile*) Montrer que si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite de terme général $\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$ aussi. On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Cesàro.

On admet dans la suite qu'on a un résultat analogue lorsque (u_n) diverge vers $-\infty$.

2) (*Lemme de l'escalier*) Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que, si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ aussi.

3) a) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ, alors la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ aussi (on pourra appliquer le lemme de l'escalier à la suite de terme général $\ln u_n$ en distinguant les cas $\ell > 0$ et $\ell = 0$).

b) En déduire la limite des suites de terme général $\sqrt[n]{n}$, $\dbinom{2n}{n}^{1/n}$ et $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

4) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$.

a) Montrer successivement que (u_n) est à valeurs positives, qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers 0.

b) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que la suite de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge vers 2 et en déduire que la suite de terme général $\sqrt{2n}u_n$ converge vers 1.