

Fiche d'exercices : Dérivation

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité et leur dérivabilité :

$$x \mapsto x\sqrt{x} \ ; \ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} \ ; \ x \mapsto (1 - x)\sqrt{1 - x^2} \ ; \ x \mapsto \sqrt{\ln(1 + x^2)}.$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables, de classe $\mathcal{C}^1$?

$$\left. \begin{array}{l} 1. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ 2. f(x) = \begin{cases} x^{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 3. f(x) = \begin{cases} |x \ln x| & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ 4. f(x) = \begin{cases} a + be^x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice 3 Déterminer la classe exacte des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \ ; \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \ ; \ f(x) = |x|^n \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 4 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire, et que si f est impaire, alors f' est paire.

Exercice 5 Calculer la dérivée n^e des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^2 e^{-3x} \ ; \ x \mapsto x \sin x \ ; \ x \mapsto \ln x \ ; \ x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 6

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n^e de la fonction $f : x \mapsto (x - a)^n (x - b)^n$.

2) En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 8 Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant une même limite finie ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$ (on pourra considérer la fonction $g = f \circ \tan$).

Exercice 9 Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}_+$), dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $f(a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ (on pourra considérer la fonction g définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g(x) = f(a - \ln(x))$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$).

Exercice 10 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}_f$ distinct de l'origine O du repère tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point passe par O .

Exercice 11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus 3 solutions réelles distinctes.

Exercice 12 Soit P un polynôme réel de degré n . Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ a au plus $n + 1$ solutions réelles.

Exercice 13 Montrer que : $\forall x > 0, \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 14 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Exercice 15 Montrer que $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} \leq \text{Arcsin} \frac{3}{5} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

Exercice 16 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 17 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 18 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

2) En déduire que si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$ (règle de l'Hospital).

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$ et la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Étudier f et démontrer qu'elle admet un unique point fixe α , puis que $\alpha \in [3, 4]$.

2) Montrer que $u_n \in [3, 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Établir, pour tout $x \in [3, 4]$, l'inégalité $|f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

c) Conclure que (u_n) converge vers α , puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 20 Montrer que la somme de deux fonctions convexes est une fonction convexe. Et le produit ?

Exercice 21 Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$ et en déduire que : $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}$.

Exercice 22 Soit f une fonction convexe et strictement monotone. Sa réciproque est-elle convexe ?