

Corrigé DM4

Exercice 1 : Proton en mouvement dans une chambre à bulles

1. Le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique et à la force de frottement, donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

2. Sans frottement et avec une vitesse initiale \vec{v}_0 orthogonale à \vec{B} le mouvement du proton est **uniforme** de vitesse v_{0x} (car la force magnétique ne travaille pas) et **circulaire**, de pulsation $\omega = \frac{eB}{m}$, de rayon $R = \frac{mv_{0x}}{eB}$ et de centre $C(0, -\frac{mv_{0x}}{eB})$.

3. On projette le PFD dans la base cartésienne :

$$m\vec{a} = m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} \quad e\vec{v} \wedge \vec{B} = e \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} 0 \\ -B\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad -k\vec{v} = -k \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau} & (2) \\ \ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau} & (3) \end{cases}$$

4. On intègre une fois par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_{0z}$ et $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y - \frac{x}{\tau} + v_{0x} & (4) \\ \dot{y} = -\omega x - \frac{y}{\tau} & (5) \\ \dot{z} = -\frac{z}{\tau} + v_{0z} & (6) \end{cases}$$

5. L'équation (6) s'écrit sous la forme :

$$\dot{z} + \frac{z}{\tau} = v_{0z}$$

Elle a comme solution générale $z(t) = \tau v_{0z} + Ae^{-t/\tau}$ avec $z(0) = 0 = \tau v_{0z} + A$. On en déduit que :

$$z(t) = \tau v_{0z} (1 - e^{-t/\tau})$$

6. Puisque le proton s'arrête quand $t \rightarrow \infty$, on a $\dot{x}(\infty) = \dot{y}(\infty) = \dot{z}(\infty) = 0$. En utilisant (4), (5) et (6), on obtient :

$$\begin{cases} 0 = \omega y_\infty - \frac{x_\infty}{\tau} + v_{0x} \\ 0 = -\omega x_\infty - \frac{y_\infty}{\tau} \\ 0 = -\frac{z_\infty}{\tau} + v_{0z} \end{cases} \iff \begin{cases} x_\infty = \frac{\tau v_{0x}}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ y_\infty = \frac{-\tau^2 \omega v_{0x}}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ z_\infty = \tau v_{0z} \end{cases}$$

7. L'équation (4) permet d'écrire :

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\dot{x} + \frac{x}{\tau} - v_{0x} \right)$$

On injecte ensuite dans l'équation (5) pour obtenir :

$$\dot{y} = -\omega x - \frac{1}{\omega\tau} \left(\dot{x} + \frac{x}{\tau} - v_{0x} \right)$$

On injecte enfin dans l'équation (1) ce qui permet d'aboutir à :

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) x = \frac{v_{0x}}{\tau}$$

Un raisonnement analogue utilisant les équations (5) puis (4) et (1) conduit à :

$$\ddot{y} + \frac{2}{\tau} \dot{y} + \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) y = -\omega v_{0x}$$

On recherche la position finale de la particule correspondant à $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ et $\dot{x} = \dot{y} = 0$. D'après les équation ci-dessus on obtient :

$$x_\infty = \frac{\tau v_{0x}}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad y_\infty = \frac{-\tau^2 \omega v_{0x}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Ces expressions sont conformes aux résultats de la question 6.

Exercice 2 : Mouvements d'un système masse + ressort

1. L'énergie potentielle élastique s'écrit $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$, avec ici $\ell = \sqrt{h^2 + x^2}$ (théorème de Pythagore).

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0 \right)^2$$

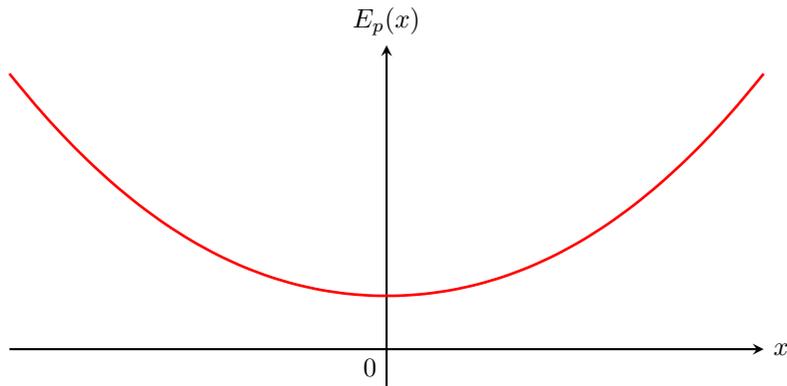
2.a) On détermine la dérivée première de l'énergie potentielle :

$$E'_p(x) = \frac{1}{2}k \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \right) \times \left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0 \right) = kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{h^2 + x^2}} \right)$$

Dans le cas où $h > \ell_0$, la parenthèse est toujours strictement positive. La seule valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule est $x = 0$. Cette position d'équilibre est unique. On construit ci-dessous le tableau de variations de $E_p(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$E'_p(x)$		-	○	+	
E_p	$+\infty$	$\frac{1}{2}k(h - \ell_0)^2$			$+\infty$

La position $x = 0$ correspond à un **minimum d'énergie potentielle** ; il s'agit donc d'une position d'équilibre **stable**. On trace l'allure de $E_p(x)$:



2.b) La pulsation propre des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $x = 0$ vaut :

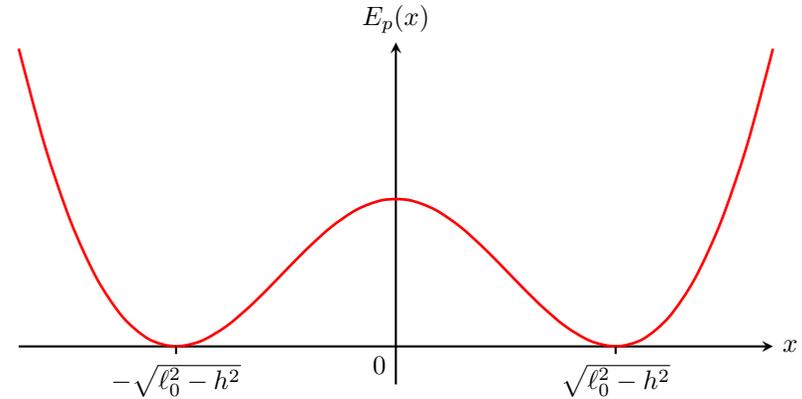
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E''_p(0)}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{h}\right)}$$

On en déduit l'expression de la période des petites oscillations : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{h}\right)}}$.

3.a) On reprend le calcul de la question 2.a). Dans le cas $h < \ell_0$, la parenthèse s'annule en $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$. Il y a donc trois positions d'équilibre : $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$. Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$		0		$\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$		$+\infty$	
$E'_p(x)$		-	○	+	○	-	○	+	
E_p	$+\infty$	$\frac{1}{2}k(h - \ell_0)^2$			0	$\frac{1}{2}k(h - \ell_0)^2$			$+\infty$

La position $x = 0$ correspond à un **maximum d'énergie potentielle** ; il s'agit donc d'une position d'équilibre **instable**. Les positions $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ sont des positions d'équilibre **stables**. On trace l'allure de $E_p(x)$:



3.b) Pour passer d'une position d'équilibre à l'autre sans être piégée dans un puits de potentiel la particule doit avoir une énergie mécanique strictement supérieure à $E_p(0) = \frac{1}{2}k(\ell_0 - h)^2$. Cela revient à dire que :

$$E_c + \underbrace{E_p(\pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2})}_{=0} > \frac{1}{2}k(\ell_0 - h)^2 \iff \frac{1}{2}mv_0^2 > \frac{1}{2}k(\ell_0 - h)^2 \iff v_0 > \sqrt{\frac{k}{m}}(\ell_0 - h)$$

4.a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell_0^2}}$ et $f''(x) = \frac{\ell_0^2}{(x^2 + \ell_0^2)^{3/2}}$. À l'ordre 2 :

$$f(x) \simeq f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) = \frac{x^2}{2\ell_0} \iff E_p(x) = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right)^2 \simeq \frac{kx^4}{8\ell_0^2}$$

On obtient le résultat attendu avec $A = \frac{k}{8\ell_0^2}$.

4.b) Autour de $x = 0$, l'énergie potentielle est de la forme Ax^4 avec $A > 0$, donc $x = 0$ est un minimum local d'énergie potentielle. $x = 0$ est une position d'équilibre **stable**. En revanche, l'énergie potentielle n'est pas celle d'un oscillateur harmonique (pas en x^2), donc les oscillations de faible amplitude **ne sont pas harmoniques**.

4.c) On exprime la conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ ($v = 0, x = a$) et un point d'abscisse x quelconque :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{kx^4}{8\ell_0^2} = \frac{ka^4}{8\ell_0^2} \iff \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{k(a^4 - x^4)}{8\ell_0^2}$$

4.d) La période des petites oscillations dépend de leur amplitude a , donc **il n'y a pas isochronisme**.

Exercice 3 : Interférences entre deux sources lumineuses

1. On calcule les distances en utilisant le théorème de Pythagore :

$$S_1M = \sqrt{\left(D + \frac{a}{2}\right)^2 + r^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{\left(D - \frac{a}{2}\right)^2 + r^2}$$

2. À partir des expressions fournies on détermine la différence de marche puis l'ordre d'interférences :

$$\delta(M) = S_1M - S_2M \simeq a - \frac{ar^2}{2D^2} \quad \text{et} \quad p(M) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{2\lambda D^2}r^2$$

On obtient le résultat attendu avec $p_0 = \frac{a}{\lambda}$ et $\alpha = \frac{a}{2\lambda D^2}$.

3. Une frange d'interférence correspond à l'ensemble des lieux qui ont une même valeur de différence de marche (ou d'ordre d'interférence, ce qui revient au même). D'après l'expression obtenue à la question précédente, une frange d'interférence est caractérisée par :

$$p(M) = \text{Cste} \iff r = \text{Cste}$$

Les franges sont donc des cercles centrés sur O'.

4. Le centre de la figure d'interférence est brillant, ce qui signifie que les interférences sont **constructives** en O'. Autrement dit, l'ordre d'interférence $p(O')$ est un entier. D'après le résultat de la question 3 :

$$p(O') = p(r = 0) = p_0$$

p_0 est un entier.

5. On remarque que l'ordre d'interférence décroît à mesure que r augmente, c'est-à-dire que l'on s'éloigne du centre. Si p_0 est l'ordre d'interférence au centre alors il vaut $p_0 - 1$ pour le premier anneau brillant et $p_0 - k$ pour le k -ième anneau brillant.

Le rayon du k -ième anneau brillant vérifie donc la relation :

$$p_0 - k = p_0 - \alpha r_k^2 \iff r_n = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$$

Par identification on trouve que $r_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = D\sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$.

6. D'après la relation précédente on peut déterminer la valeur de a en mesurant le rayon r_n d'un anneau brillant :

$$a = \frac{2k\lambda D^2}{r_k^2}$$

On choisit sur la figure 2 le rayon le plus grand possible (pour gagner en précision). Il s'agit de l'anneau $k = 14$ et on mesure, à l'aide de l'échelle fournie :

$$r_{14} = 19 \text{ cm}$$

La distance entre les deux sources vaut $a = 0,59 \text{ mm}$.

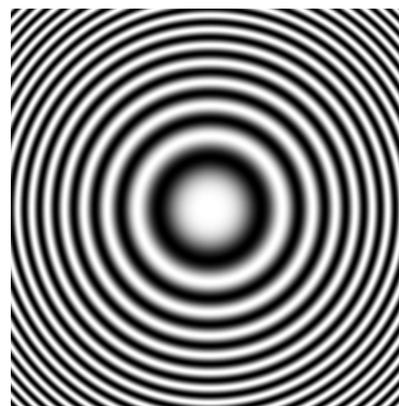
7. Dans le cas où le système est plongé dans un milieu d'indice $n \neq 1$ il faut modifier la différence de marche de la manière suivante :

$$\delta = (S_1M) - (S_2M) = n(S_1M - S_2M)$$

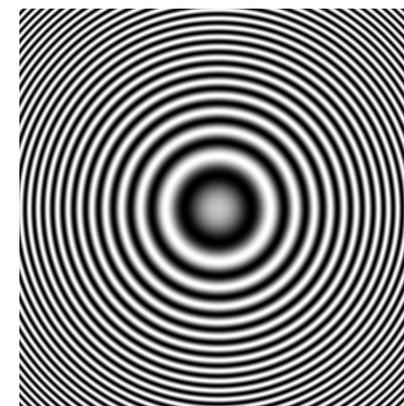
On trouve alors que $p(M) = \frac{na}{\lambda} - \frac{na}{2\lambda D^2}r^2$. L'ordre d'interférence au centre de la figure est $p_0 = \frac{na}{\lambda}$; il n'est plus forcément entier donc **le centre de la figure d'interférence n'est plus nécessairement brillant**. Les rayons des anneaux brillants suivent la relation :

$$r_k = \sqrt{k}r_1 = D\sqrt{\frac{2\lambda}{na}} \times \sqrt{k}$$

Comparé au cas où le système est plongé dans l'air les rayons des anneaux brillants sont plus petits d'un facteur $1/\sqrt{n}$. **Les anneaux sont plus proches les uns des autres dans le cas où le système est plongé dans l'eau.**



système plongé dans l'air



système plongé dans l'eau