DS de physique n° 4

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 4 exercices indépendants.*

Exercice 1 : Chocs entre deux masses

Une masse M est lancée avec une vitesse $\vec{V}_0 = V_0\vec{u}_x$ sur un plan horizontal. Une masse $m \ll M$ est initialement immobile, à une distance L d'une paroi fixe (voir figure 1). On néglige tout frottement et on ne tient pas compte de la taille des masses, que l'on assimilera donc à des points matériels.

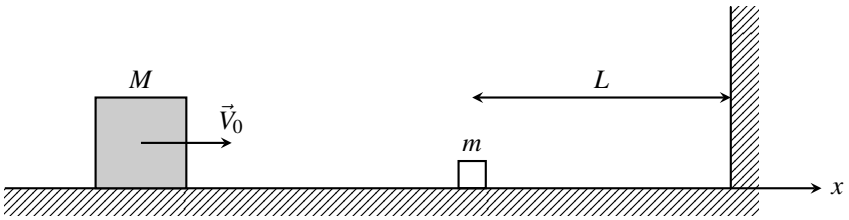


Figure 1 : Schéma du dispositif

Dans l'hypothèse $m \ll M$ de multiples chocs se produisent entre les deux masses ainsi qu'entre la masse m et la paroi fixe. On admet les propriétés suivantes :

- les chocs sont instantanés et font brutalement varier les vecteurs vitesses des deux masses. On numérote avec l'indice n les chocs **entre les deux masses** (n ne prend pas en compte les chocs entre m et la paroi fixe). On note respectivement $\vec{V}_n = V_n\vec{u}_x$ et $\vec{v}_n = v_n\vec{u}_x$ la vitesse de la masse M et celle de la masse m, après le $n^{\text{ième}}$ choc entre les deux masses ;
- tous les chocs sont élastiques, ce qui signifie que :
  - lors d'un choc entre les deux masses la quantité de mouvement totale $\vec{p}_{\text{masse } M} + \vec{p}_{\text{masse } m}$ ainsi que l'énergie cinétique totale $E_{\text{c, masse } M} + E_{\text{c, masse } m}$ du système $\mathscr{S}$ ={masse M + masse m} se conservent (même valeur avant et après le choc) ;
  - lors d'un choc avec la paroi le vecteur vitesse de la masse m change de signe mais conserve la même norme.

1. On admet pour l'instant que le nombre de chocs est fini. Expliquer qualitativement comment va se comporter la masse M au cours du temps, dans le cas $m \ll M$. D'après vous quel sera approximativement le vecteur vitesse de la masse M après le dernier choc ?

2. À l'aide des deux lois de conservation établir les relations de récurrence ci-dessous :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}v_n + \dfrac{2}{1+\varepsilon}V_n \\ V_{n+1} = -\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}v_n + \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}V_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{m}{M}$$

Une résolution analytique non demandée permet d'obtenir l'expression des vitesses $\forall n \geq 0$:

$$v_n = \frac{V_0}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\left[2n \arctan\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad V_n = V_0 \cos\left[2n \arctan\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right]$$

3. En utilisant un argument physique justifier qu'en pratique le nombre de chocs n entre les deux masses s'arrête à une valeur finie. Donner l'expression approchée de la valeur asymptotique n_∞ du nombre de chocs entre les deux masses. On simplifiera le résultat obtenu en utilisant le développement du premier ordre suivant : $\arctan(\sqrt{\varepsilon}) \simeq \sqrt{\varepsilon}$ si $\varepsilon \ll 1$.

On note N_∞ la valeur asymptotique du nombre **total** de chocs (entre les deux masses **et** entre la masse m et la paroi). Ce dispositif possède une propriété mathématique inattendue et amusante. Si la masse M est 10^{2k} fois plus lourde que m (avec k un entier naturel) alors N_∞ s'écrit avec les k premières décimales de π. Par exemple :

— si $M = m$ on compte en tout $N_\infty = 3$ chocs ;

— si $M = 10^2 m$ on compte en tout $N_\infty = 31$ chocs ;

— si $M = 10^4 m$ on compte en tout $N_\infty = 314$ chocs, et ainsi de suite.

4. Sans chercher à démontrer rigoureusement cette propriété montrer qu'elle est cohérente avec la valeur approximative de n_∞ obtenue à la question précédente.

On note t_n la date du $n^{\text{ième}}$ choc et L_n la distance qui sépare les masses de la paroi à la date t_n.

5. Établir deux relations entre les distances d_{n+1} et d_n, les dates t_{n+1} et t_n, faisant intervenir les vitesses V_n et v_n. En déduire une relation de récurrence du type $d_{n+1} = f(v_n, V_n)\, d_n$ où f est une fonction à expliciter.

6. Avec l'hypothèse $m \ll M$ on montre que pendant la phase du mouvement où la masse M se déplace vers les x croissants on peut faire l'approximation $f(v_n, V_n) \simeq \dfrac{2n-1}{2n+1}$. En déduire l'expression de d_n , $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que la distance minimale entre la masse M et la paroi vaut :

$$d_{\min} \simeq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\pi} L$$

Exercice 2 : Mouvement d'un électron dans un champ stationnaire et uniforme

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on considère un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ stationnaire et uniforme ($B_0 > 0$).

1. Le poids a-t-il une influence sur la dynamique de l'électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur. On considère un champ magnétique $B \sim 10^{-5}\,\text{T}$ et une vitesse $v \sim 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. On suppose que la vitesse initiale de l'électron s'écrit $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$. Décrire le mouvement de l'électron.

3. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$ ($v_{0x} > 0$). Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Évaluer son rayon R_c et sa période T_c.

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathscr{P} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left\| \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \right\|^2$ avec e la charge élémentaire et c la célérité de la lumière dans le vide.

4. Sous l'effet de la puissance rayonnée la vitesse $\left\|\vec{v}\right\|$ et le rayon R_c de la trajectoire deviennent variables. On étudie une portion infinitésimale de la trajectoire de l'électron au cours de laquelle le rayon varie de $\mathrm{d}R_c$. On suppose que le rayon R_c varie suffisamment lentement pour que les expressions obtenues à la question 3 soient toujours valables en première approximation. Exprimer la variation de l'énergie cinétique $\mathrm{d}E_{\text{cin}}$ de l'électron en fonction de $\mathrm{d}R_c$. En déduire une équation différentielle vérifiée par $R_c(t)$. Résoudre cette équation et montrer que l'on peut identifier un temps caractéristique $\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$ avec $\omega_c = 2\pi/T_c$. Conclure.

5. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Montrer que la trajectoire de l'électron est hélicoïdale et déterminer le pas h de l'hélice (distance parcourue dans la direction $\vec{u}_z$ au cours d'une révolution autour de l'axe de l'hélice).

Exercice 3 : Vibration d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche d'un clavier de piano, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau, qui vient frapper une corde. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans ce problème aux vibrations libres d'une corde du piano.

A – Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$. On admet que dans ce modèle où l'on néglige la raideur de la corde celle-ci se comporte comme un milieu non dispersif et sans atténuation de célérité c.

1. Qu'appelle-t-on « onde stationnaire » ? Donner l'expression générale $y(x,t)$ d'une onde stationnaire sinusoïdale de pulsation ω, vecteur d'onde k et amplitude y_0. Justifier que l'on peut arbitrairement choisir une phase initiale nulle pour le terme qui dépend du temps. Quelle est la relation entre ω et k ?

2. Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L. Donner l'expression de la solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode propre numéro n. Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

L'expression générale d'une vibration quelconque correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi ct}{L}\right)\right) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

où les coefficients a_n et b_n dépendent des conditions initiales (position et vitesse en tout point de la corde) à l'instant où on l'attaque pour la mettre en vibration. Dans le cas d'un piano la corde est frappée à l'instant initial par un marteau de largeur $2a$ (faible), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On admet l'expression de la vibration :

$$y(x,t) = \frac{4u_0 a x_0}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi a}{L}\right)}{n\frac{\pi a}{L}} \frac{\sin\left(n\frac{\pi x_0}{L}\right)}{n\frac{\pi x_0}{L}} \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n\frac{\pi ct}{L}\right)$$

où u_0 est la vitesse initiale des points de la corde sur la largeur $2a$ qui entre en contact avec le marteau (la vitesse initiale des autres points est supposée nulle). On donne en annexe l'allure du graphe de la fonction « sinus cardinal » définie par $x \mapsto \mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

3. Quel est l'effet de la largeur a du marteau sur l'allure du spectre en amplitude ? Pour une corde de piano de longueur $L = 65\,\mathrm{cm}$ (« Do 4 », fréquence fondamentale $f_1 = 262\,\mathrm{Hz}$), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible. La largeur du marteau vaut $2a = 2\,\mathrm{cm}$. Commentaire ?

4. Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n ?

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f = 4,2\,\mathrm{kHz}$). La célérité des ondes sur la corde dépend de la force de tension T_0 qu'on lui exerce et de sa masse linéique μ selon la loi $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

5. Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f.
On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262\,\mathrm{Hz}$, on a une longueur de corde $L = 65\,\mathrm{cm}$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu si l'on suppose que la célérité c est la même pour toutes les cordes ?

6. Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi énoncée à la question 5 pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension T_0 des cordes ?

7. On donne la masse volumique du cuivre : $\rho(\mathrm{Cu}) = 9,0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et celle de l'acier : $\rho(\mathrm{acier}) = 7,8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850\,\mathrm{N}$, calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$).

B – Modes propres d'une corde de piano avec raideur, fixée aux deux extrémités

En pratique une corde de piano qui se déforme possède une certaine élasticité et il faut tenir compte de sa raideur. On montre alors que la corde devient un milieu dispersif et la relation entre ω et k écrite à la question 1 doit être modifiée. On s'intéresse à l'influence de la raideur sur les fréquences propres de la corde. On se place donc dans un mode propre de vibration et on suppose $y(x,t) = y_0 \sin(kx+\psi)\sin(\omega t)$. Dans le cas où l'effet de la raideur est « faible » on admet que l'expression des fréquences propres obtenue à la question 2 doit être modifiée par l'ajout d'un terme correctif :

$$f_n = n\frac{c}{2L}\sqrt{1+Bn^2} \quad \text{avec} \quad B = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}$$

où n est un entier naturel non nul et c la célérité des ondes sur la corde sans raideur. r désigne le rayon de la corde et E, appelé « module d'Young », traduit les propriétés d'élasticité du matériau.

8. Quelle est l'unité SI du module d'Young ?

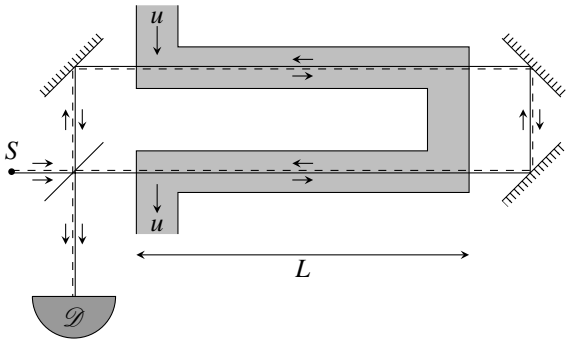
9. Il est préférable que le son produit par un instrument soit tel que les fréquences des harmoniques soient des multiples entiers de la fréquence fondamentale (on parle de son « harmonique »). Les pianos à queue utilisés en concert ont typiquement des cordes plus longues que les pianos droits. Expliquer en quoi cela est un avantage en termes de qualité musicale.

10. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f_n en fonction de n pour une corde sans raideur et pour la même corde avec raideur. Commenter.

11. On donne $B = 3,8\cdot 10^{-4}$. En déduire le taux d'inharmonicité de raideur i_n, définie par $i_n = (f_n - f_n^0)/f_n^0$ où f_n^0 désigne la fréquence propre du mode n pour une corde sans raideur. On considère un harmonique tel que $Bn^2 \ll 1$.

12. À partir de quel rang n la fréquence propre f_n de la corde avec raideur est-elle plus élevée d'un demi-ton que celle de la corde idéale, f_n^0 ?
Donnée : deux notes séparées d'un demi-ton ont des fréquences fondamentales qui sont dans un rapport $2^{1/12}$.

Exercice 4 : Expérience de Fizeau



S est une source lumineuse ponctuelle (de longueur d'onde dans le vide λ). Dans le tube transparent circule de l'eau, d'indice de réfraction n, à la vitesse uniforme (en norme) u. Le faisceau lumineux issu de la source est séparé en deux par une lame semi-réfléchissante. Après avoir parcouru le même chemin, mais en sens opposés, les deux ondes lumineuses atteignent à nouveau la lame. On s'intéresse ici uniquement aux deux ondes qui vont interférer au niveau du détecteur. Par souci de clarté, on a distingué sur le schéma par un trait plein et un trait en pointillés les deux rayons lumineux qui interfèrent. **En réalité, ils se superposent**. Les flèches permettent de suivre le sens de propagation de chaque rayon au cours de sa propagation.

L'onde lumineuse qui se propage dans le tube est entraînée par le mouvement de l'eau, si bien que la célérité de l'onde par rapport à un observateur extérieur n'est pas la même suivant qu'elle se propage dans le sens du courant ou à contre-courant. Dans le cadre de la composition classique (ou galiléenne) des vitesses, on admet que la célérité de l'onde dans l'eau en mouvement est donnée par la relation :

$$v = v' + v_e$$

Où v' est la célérité de la lumière dans l'eau au repos, $v_e = u$ si l'onde se propage dans le sens du courant et $v_e = -u$ si elle se propage à contre-courant.

Données : $n = 1,33$, $u = 7,0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $L = 1,50\,\mathrm{m}$; $\lambda = 540\,\mathrm{nm}$.

1. Exprimer l'ordre d'interférence p_c au niveau du détecteur $\mathscr{D}$ si l'on suppose que la loi classique de composition des vitesses est valable. Faire l'application numérique. Que dire de l'intensité de l'onde lumineuse reçue par le détecteur si le calcul précédent est valable ?

On adopte désormais la loi relativiste de composition des vitesses : $v = \dfrac{v' + v_e}{1 + \dfrac{v' v_e}{c^2}}$.

2. Exprimer l'ordre d'interférence p_r en $\mathscr{D}$ avec la loi de composition des vitesses relativiste et faire l'application numérique. Comparer l'intensité lumineuse reçue par le détecteur avec ce qui était prévu dans la question 1.
L'expérience, réalisée en 1851, soit plus de 50 ans avant l'avènement de la théorie de la relativité restreinte, a donné un résultat conforme à la valeur de p_r.

ANNEXE

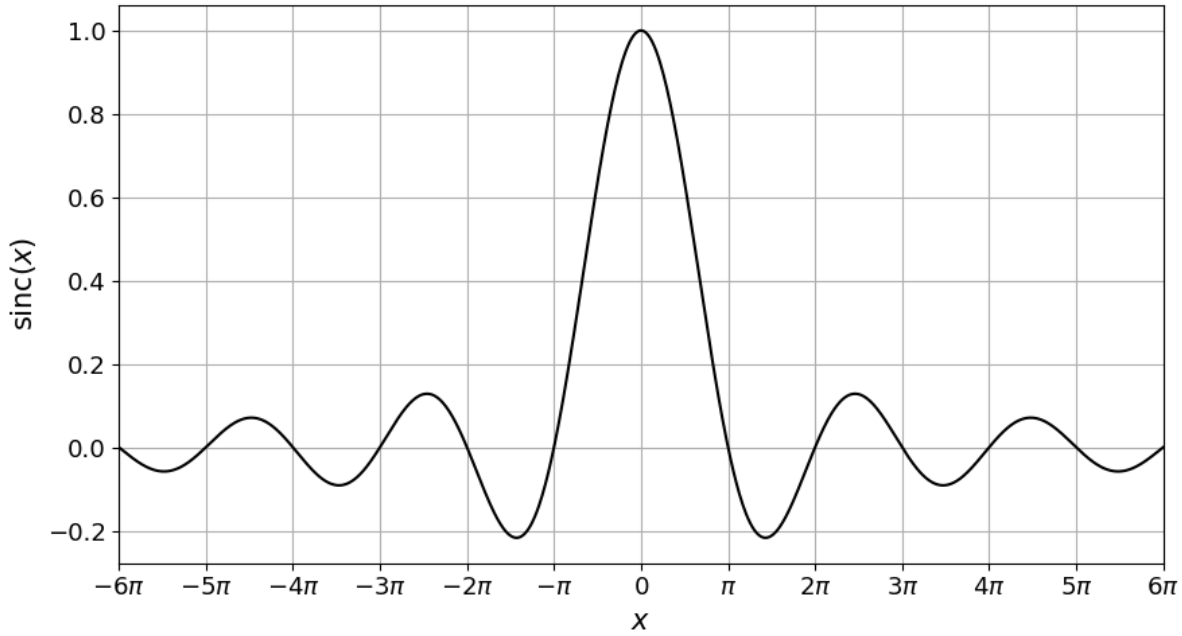


Figure 2 : Graphe de la fonction sinus cardinal