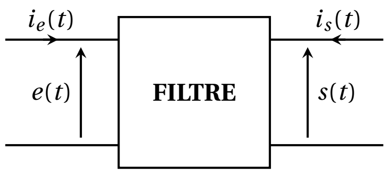
Chapitre 16 : Filtrage linéaire

1 Notion de filtre

1.1 Définition



Un filtre est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les différentes composantes spectrales d'un signal d'entrée.

- Un **filtre passif** est un filtre qui n'est composé que de dipôles passifs (condensateurs, bobines, résistances,...).
- Un **filtre actif** est un filtre composé de dipôles actifs, c'est-à-dire alimentés par une source extérieure (amplificateur linéaire intégré (ALI), transistors,...)

1.2 Fonction de transfert, gain, phase

Dans un filtre constitué de dipôles (actifs ou passifs) linéaires, et à condition que tous les générateurs, s'il y en a plusieurs, aient la même fréquence, on peut appliquer la méthode complexe.

La fonction de transfert $\underline{H}$ et **le gain** G du filtre sont définis par :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}} \qquad \boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|\frac{\underline{S}}{\underline{E}}\right|}$$

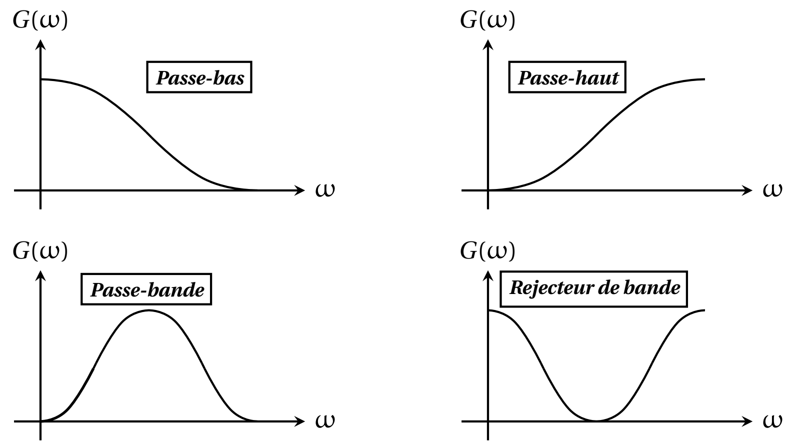
Rq : $\underline{H}$ et G sont des grandeur sans dimension. G est une grandeur positive. Lorsque $G > 1$, on dit que la tension est **amplifiée** par le filtre, tandis que lorsque $G < 1$, on dit que la tension est **atténuée**.

Par définition, l'argument de la fonction de transfert est égal à l'avance de phase de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

$$\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(\underline{S}) - \arg(\underline{E}) = \varphi_s - \varphi_e}$$

1.3 Types de filtres

Les filtres linéaires peuvent être rangés dans quatre grandes catégories, selon la manière dont ils transmettent les différentes fréquences du signal d'entrée.



Pour les circuits linéaires, la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable $\mathrm{j}\omega$.

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{N}(\mathrm{j}\omega)}{\underline{D}(\mathrm{j}\omega)}$$

Où $\underline{N}(\mathrm{j}\omega)$ et $\underline{D}(\mathrm{j}\omega)$ sont deux polynômes de la variable $\mathrm{j}\omega$.

On définit alors **l'ordre d'un filtre** comme étant égal au degré du polynôme $\underline{D}(\mathrm{j}\omega)$.

1.4 Diagramme de Bode

On définit le **gain en décibel** d'un filtre par la quantité :

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20\log(G) = 20\log(|\underline{H}|)}$$

Le diagramme de Bode d'un filtre est constitué de deux graphiques:

- Le **diagramme de Bode en gain** est le diagramme $G_{\mathrm{dB}} = f(\log(\omega))$
- Le **diagramme de Bode en phase** est le diagramme $\varphi = f(\log(\omega))$

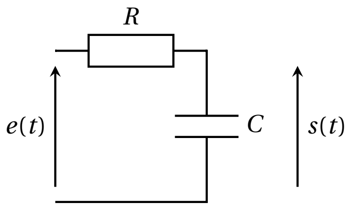
Le diagramme de Bode est caractéristique du filtre. C'est un diagramme en échelle logarithmique. En abscisse, il est gradué en **décades**.

2 Filtres passifs

IMPORTANT : Dans l'intégralité de ce paragraphe, on supposera toujours le courant de sortie $\underline{I_s} = 0$ (sortie à vide).

2.1 Filtre RC passe-bas du premier ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bas du premier ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance et d'un condensateur associés en série.



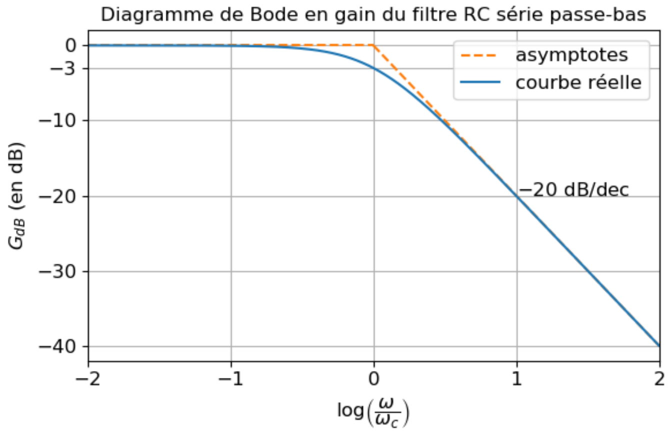
2.1.1 Fonction de transfert

Le fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_\mathrm{c}}}}$$

Où H_0 représente le gain maximal du filtre et ω_c est la **pulsation de coupure**. Pour le filtre RC passe-bas, $H_0 = 1$ et $\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{RC}$.

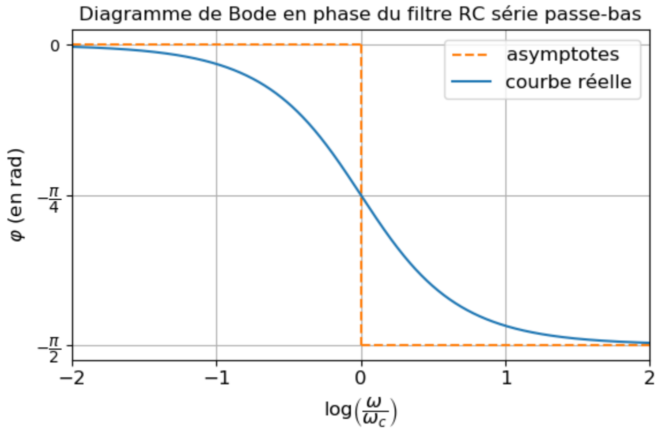
2.1.2 Diagramme de Bode en gain



- Le gain en décibel est maximal en BF ($x \ll 1$) et vaut 0 dB (correspond à un gain $G = 1$).
- L'atténuation en HF ($x \gg 1$) est de 20 dB/dec.
- La pulsation de coupure vaut ω_c, la bande-passante du filtre est donc $[0, \omega_\mathrm{c}]$.
- À la pulsation de coupure, $G_\mathrm{dB}(\omega_\mathrm{c}) = G_\mathrm{dB,max} - 3\,\mathrm{dB}$.

2.1.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en phase. En HF, ils sont en quadrature de phase ($s(t)$ possède un retard de $\pi/2$ sur $e(t)$). À la fréquence de coupure, le déphasage vaut $-\pi/4$.



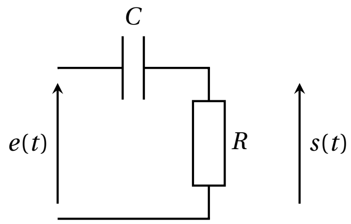
2.1.4 Caractère intégrateur du filtre en HF

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur en HF, c'est-à-dire pour toutes les composantes harmoniques du signal d'entrée de fréquence très supérieure à la fréquence de coupure du filtre. Dans le cas du filtre RC passe-bas, le filtre effectue en HF l'opération suivante :

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{RC}\int e(t)\,\mathrm{d}t}$$

2.2 Filtre RC passe-haut du premier ordre

On illustre le comportement des filtres passe-haut du premier ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance et d'un condensateur en série.



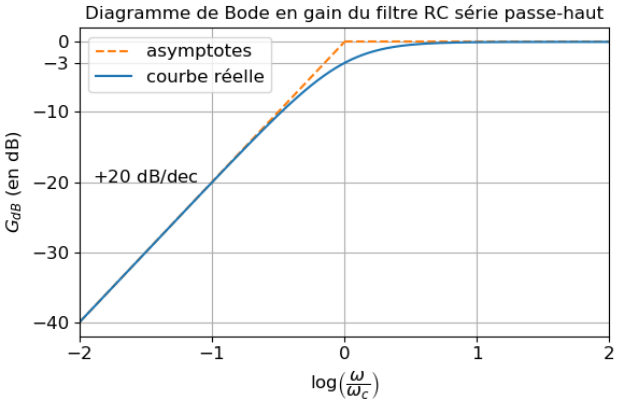
2.2.1 Fonction de transfert

Le fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_\mathrm{c}}{\mathrm{j}\omega}}}$$

Où H_0 représente le gain maximal du filtre. Pour le filtre RC passe-haut, $H_0 = 1$ et $\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{RC}$.

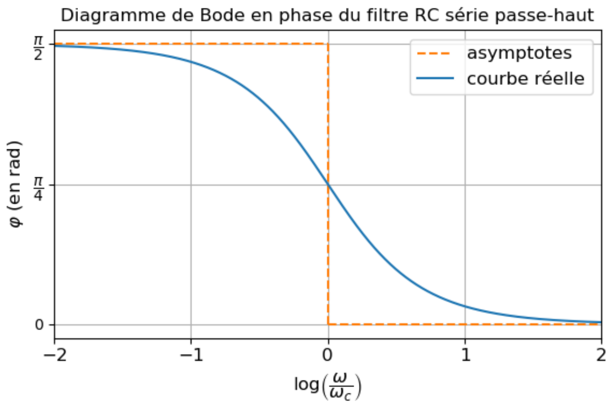
2.2.2 Diagramme de Bode en gain



- Le gain en décibel est maximal en HF et vaut 0 dB (correspond à un gain $G = 1$).
- L'atténuation en BF est de 20 dB/dec.
- La pulsation de coupure vaut ω_c, la bande-passante du filtre est donc $[\omega_c, \infty[$.
- À la pulsation de coupure, $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3\,\text{dB}$.

2.2.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase. En HF, ils sont en phase. À la pulsation de coupure, le déphasage vaut $\pi/4$.



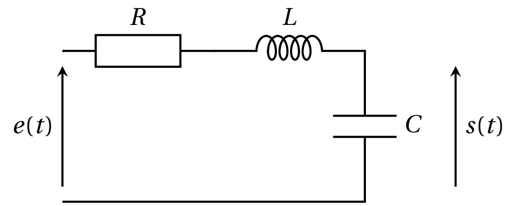
2.2.4 Caractère dérivateur du filtre en BF

Un filtre passe-haut du premier ordre se comporte comme un dérivateur en BF. Dans le cas du filtre RC passe-haut, le filtre effectue en BF l'opération suivante :

$$\boxed{s(t) = RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

2.3 Filtre RLC passe-bas du deuxième ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bas du deuxième ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine placée en série.



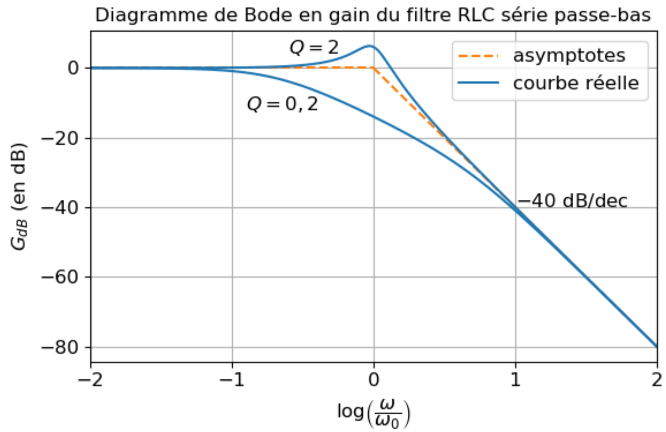
2.3.1 Fonction de transfert

Le fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système et Q est le facteur de qualité. Pour le filtre RLC série passe-bas, $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

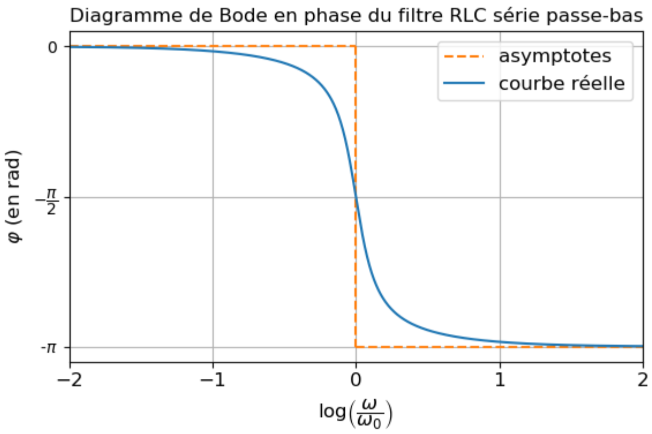
2.3.2 Diagramme de Bode en gain



- L'atténuation en HF est de 40 dB/dec.
- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors le gain est maximal quand $\omega \longrightarrow 0$.
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors le système entre en résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

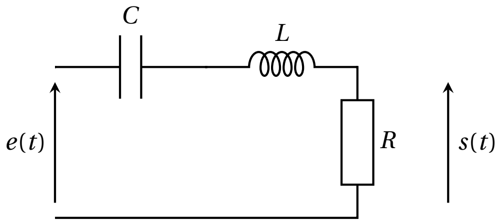
2.3.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en phase. En HF, ils sont en opposition de phase. Pour $\omega = \omega_0$, ils sont en quadrature de phase.



2.4 Filtre RLC passe-bande du deuxième ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bande du deuxième ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine placée en série.



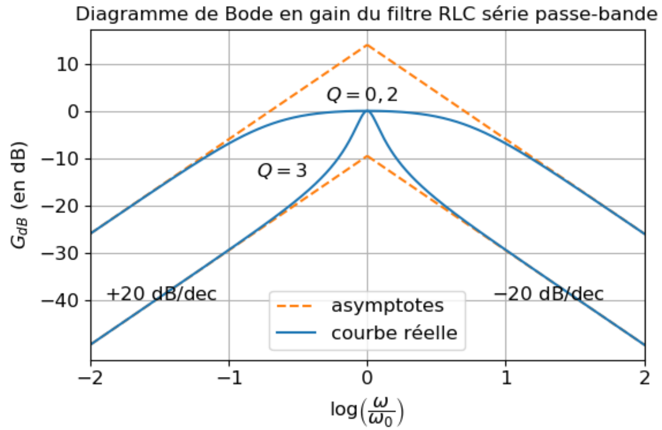
2.4.1 Fonction de transfert

Le fonction de transfert d'un filtre passe-bande du deuxième ordre s'écrit sous la forme canonique:

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système et Q est le facteur de qualité. Pour le filtre RLC série passe-bande, $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

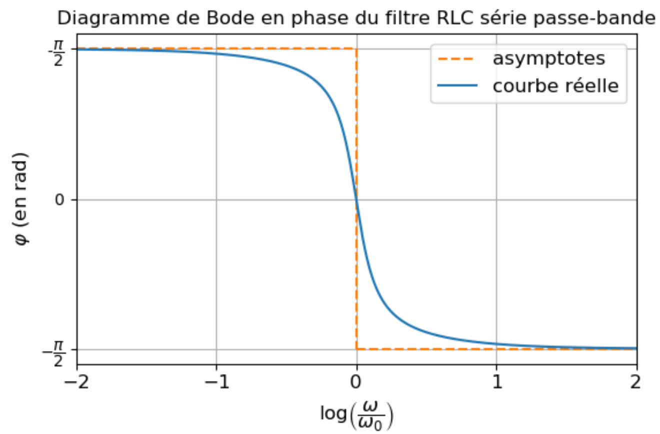
2.4.2 Diagramme de Bode en gain



- L'atténuation en BF et en HF est de 20 dB/dec.
- Il y a résonance en $\omega = \omega_0$, le gain vaut alors 0 dB ($G = 1$).
- Plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aigüe, on dit que le filtre est **sélectif**. À l'inverse, plus le facteur de qualité est faible et plus la résonance devient plate. Le filtre est peu sélectif.

2.4.3 Diagramme de Bode en phase

En BF et en HF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase. Pour $\omega = \omega_0$, ils sont en phase.



3 Valeur moyenne, valeur efficace

3.1 Définitions

La **valeur moyenne** $\langle s \rangle$ d'un signal périodique $s(t)$ de période T est définie par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

La **valeur efficace** s_{eff} d'un signal périodique $s(t)$ de période T est définie par :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t}$$

3.2 Signal périodique quelconque

Pour un signal périodique quelconque, on rappelle tout d'abord qu'il peut être décomposé en série de Fourier (composante continue plus somme de signaux harmoniques de fréquences multiples entiers de la fréquence fondamentale) :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(t)$$

Où $s_n(t)$ est l'harmonique de rang n de $s(t)$. Dans ce cas, on peut montrer que **le carré de la valeur efficace d'un signal périodique quelconque est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques**.

$$s_{\text{eff}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n,\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2}$$

4 Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

4.1 Action sur une somme finie de signaux harmoniques

Considérons un signal d'entrée constitué d'une somme finie de termes sinusoïdaux, d'amplitudes a_i et de pulsations ω_i distinctes :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{N} A_{e,i} \cos\left(\omega_i t + \varphi_{e,i}\right) = \sum_{i=1}^{N} e_i(t)$$

On cherche à déterminer la réponse $s(t)$ d'un filtre linéaire, caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}$, à l'excitation $e(t)$.

La réponse d'un filtre linéaire à une somme d'excitations sinusoïdales de fréquences distinctes est égale à la somme des réponses du filtre pour chaque composante spectrale supposée seule.
Autrement dit, un filtre linéaire traite chaque composante spectrale <u>indépendamment</u> les unes des autres. Le signal de sortie s'écrit alors sous la forme :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} A_{s,i} \cos\left(\omega_i t + \varphi_{s,i}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_{s,i} = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega_i)\right| A_{e,i} \\ \varphi_{s,i} = \varphi_{e,i} + \arg\left(\underline{H}(\mathrm{j}\omega_i)\right) \end{cases}$$

4.2 Action sur un signal périodique quelconque

Un filtre peut être utilisé pour effectuer des opérations mathématiques sur un signal (intégration, dérivation, mesure de la valeur moyenne, supression d'une composante continue,etc...). Il s'agit dans chaque cas d'adapter les propriétés du filtre (nature, pulsations de coupure) à la fonction désirée

4.2.1 Suppression d'une composante continue

Un tel filtre supprime la composante continue du signal et transmet sans atténuation la partie variable. C'est par exemple le rôle du mode AC d'un oscilloscope.

4.2.2 Moyenneur

Un moyenneur est un quadripôle qui renvoie en sortie la valeur moyenne du signal d'entrée, c'est-à-dire uniquement sa <u>composante continue</u>.

4.2.3 Pseudo-intégrateur

Un intégrateur idéal est un filtre qui intègre tous les signaux, quelle que soit leur fréquence. Un pseudo-intégrateur n'intègre que sur une certaine bande de fréquence.

4.2.4 Pseudo-dérivateur

Un dérivateur idéal est un filtre qui dérive tous les signaux, quelle que soit leur fréquence. Un pseudo-dérivateur ne dérive que sur une certaine bande de fréquence.

4.3 Impédance d'entrée, de sortie

Pour assurer que le comportement d'un filtre de tension ne dépend pas de son environnement (circuit en amont ou en aval), notamment lorsqu'ils sont utilisés en cascade, ceux-ci doivent avoir une **très grande impédance d'entrée** (filtre indépendant du circuit amont) en une **très faible impédance de sortie** (filtre indépendant du circuit en aval).