

## Correction du DNS 17

### EXERCICE 1

Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$  est du signe de  $1 - x$ . La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$  est donc définie sur  $D = ]-\infty, 1]$ . Elle est continue sur  $D$  et dérivable sur  $D \setminus \{0, 1\}$  d'après les théorèmes sur les opérations (on ne sait pas si  $f$  est dérivable en 0 et en 1 car  $x^2 - x^3$  s'annule en ces points et  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas dérivable en 0).

Étude en 0 : pour tout  $x \in D \setminus \{0\}$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 - x}}{x}$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

La fonction  $f$  est donc dérivable à gauche et à droite en 0, mais  $f'_g(0) = -1$  alors que  $f'_d(0) = 1$ , donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

Étude en 1 : pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x - 1} = \frac{x\sqrt{1 - x}}{-(1 - x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty$$

donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 1.

### EXERCICE 2

1) On a  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  donc  $f(0) = 0$ .

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons par récurrence que  $f(nx) = nf(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour  $n = 0$  c'est une conséquence du 1).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f(nx) = nf(x)$ . Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Par le théorème de récurrence, on a donc bien  $f(nx) = nf(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3) On peut en fait montrer que  $f$  est impaire : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ , donc  $f(-x) = -f(x)$ .

Ainsi, si  $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(nx) = f(-(-n)x) = -f(-nx) = nf(x)$  car  $-n \in \mathbb{N}$ .

On a donc bien  $f(nx) = nf(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

4) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  (où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ ). Alors  $f(px) = pf(x)$  et  $f(px) = f(qrx) = qf(rx)$ , donc  $f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x)$ .

5) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Soit  $(x_n)$  une suite de rationnels qui converge vers  $x$ . Alors  $f(x_n y) = x_n f(y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or on a, d'une part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y = xy$  donc, par continuité de  $f$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n y) = f(xy)$  et, d'autre part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(y) = x f(y)$ , donc, par unicité de la limite, on a  $f(xy) = x f(y)$ .

6) Posons  $a = f(1)$ . Alors d'après la question précédente on a  $f(x) = ax$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

7) Posons  $g(x) = ax$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a  $g(x + y) = a(x + y) = ax + ay = g(x) + g(y)$ .

### EXERCICE 3

1) Soit  $A \in \mathbb{R}$ .

La suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 3A$ .

Posons  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ . Pour tout  $n \geq n_0$  on peut écrire  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n u_k$ .

Or  $\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$  est une constante, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k = 0$ . Par conséquent il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $-A \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \leq A$  pour tout  $n \geq n_1$ .

De plus  $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n u_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n 3A = \frac{3A(n-n_0+1)}{n} = 3A + \frac{3A(-n_0+1)}{n}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3A(-n_0+1)}{n} = 0$  donc il existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_2$ ,  $-A \leq \frac{3A(-n_0+1)}{n} \leq A$ .

Ainsi, pour tout  $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$ , on a  $S_n \geq -A + 3A - A = A$ , ce qui prouve bien que  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$ .

2) Supposons que la suite de terme général  $v_n = u_{n+1} - u_n$  tend vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors d'après le théorème de Césaro et ce qui précède, la suite de terme général  $\frac{v_1 + \dots + v_n}{n}$  aussi.

Or  $\frac{v_1 + \dots + v_n}{n} = \frac{u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_{n+1} - u_n}{n} = \frac{u_{n+1} - u_0}{n}$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-u_0}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{n} = \ell$ .

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n-1} = \ell$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \frac{u_n}{n-1} = \ell$ .

3) a) Supposons  $\ell > 0$ . La suite de terme général  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$  converge donc vers  $\ln \ell$ .

Alors, d'après le lemme de l'escalier, la suite de terme général  $\frac{\ln u_n}{n}$  aussi. Or  $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln u_n}{n}}$ , donc la suite de terme général  $\sqrt[n]{u_n}$  converge vers  $e^{\ln \ell} = \ell$ .

Supposons maintenant que  $\ell = 0$ . Alors la suite de terme général  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$  diverge vers  $-\infty$ .

Ainsi, d'après le lemme de l'escalier, la suite de terme général  $\frac{\ln u_n}{n}$  aussi. Or  $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln u_n}{n}}$ , donc la suite de terme général  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers 0.

b) Posons  $u_n = n$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$  donc, d'après le a),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$  aussi.

Posons ensuite  $u_n = \binom{2n}{n}$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$ , donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$  et donc, d'après le a),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \binom{2n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = 4$  aussi.

Posons enfin  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$  (déjà vu) donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$  et donc, d'après le a),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$  aussi.

4) a) Par récurrence immédiate on montre facilement que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n^2} < 1$ , donc  $(u_n)$  est décroissante. Comme, de plus, elle est minorée (par 0), on en déduit qu'elle est convergente.

Soit  $\ell$  sa limite. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$ , donc en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell = \frac{\ell}{1 + \ell^2}$  (par continuité de  $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ ), d'où  $\ell + \ell^3 = \ell$  et donc  $\ell = 0$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{(1 + u_n^2)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{2u_n^2 + u_n^4}{u_n^2} = 2 + u_n^2$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 2$ .

Par le lemme de l'escalier, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 2$  également, et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = 2$ , d'où on tire facilement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2nu_n} = 1$ .