

Correction du DNS 18

EXERCICE 1

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes sur les opérations.

Par les croissances comparées on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln |x| = 0$$

donc f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Continuité de f' en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \ln |x| + x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$$

donc f' est continue en 0 (la dérivée de $\ln |x|$ est $\frac{1}{x}$ et non $\frac{1}{|x|}$).

Par conséquent la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de f' en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln |x| + 1) = -\infty$$

donc f' n'est pas dérivable en 0 et la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Soit $b \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Soit $a \in [0, 1]$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Elle passe par le point de coordonnées $(b, 0)$ si et seulement si

$$f(a) + f'(a)(b - a) = 0.$$

Considérons la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - b}.$$

Cette fonction est dérivable sur $[0, 1]$ et $g(0) = g(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, i.e. tel que

$$\frac{f'(c)(c - b) - f(c)}{(c - b)^2} = 0.$$

On a ainsi $f(c) + f'(c)(b - c) = 0$. D'après ce qui précède, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c passe par le point de coordonnées $(b, 0)$.

EXERCICE 3

1) La fonction Arcsinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, on a, après calculs :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} ; \text{Arcsin}''(x) = \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} ; \text{Arcsin}^{(3)}(x) = \frac{2x^2 + 1}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Noter que les calculs sont plus simples en gardant $(1 - x^2)^{1/2}$ et $(1 - x^2)^{3/2}$ plutôt que de passer par les racines carrées. On peut aussi utiliser des exposants négatifs pour dériver des produits plutôt que des quotients.

2) a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\text{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}}$.

Au rang 1, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P_1(x)}{(1 - x^2)^{1 - \frac{1}{2}}}$ en posant $P_1(x) = 1$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n . Alors pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} \text{Arcsin}^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} - P_n(x)(n - \frac{1}{2})(1 - x^2)^{n - \frac{3}{2}}(-2x)}{(1 - x^2)^{2n - 1}} \\ &= \frac{(1 - x^2)P_n'(x) + (2n - 1)xP_n(x)}{(1 - x^2)^{n + \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{(1 - x^2)^{n + 1 - \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

où on a posé $P_{n+1}(x) = (1 - x^2)P'_n(x) + (2n - 1)xP_n(x)$ (donc P_{n+1} est bien une fonction polynomiale).

Par le théorème de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

b) On a, d'après la première question, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x$ et $P_3(x) = 2x^2 + 1$.

On en déduit que $P_4(x) = (1 - x^2)P'_3(x) + 5xP_3(x) = 6x^3 + 9x$, puis que $P_5(x) = (1 - x^2)P'_4(x) + 7xP_4(x) = 24x^4 + 72x^2 + 9$.

c) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x)$ est de degré $n - 1$ et que son coefficient dominant est $(n - 1)!$.

C'est vrai pour $n = 1$ car $P_1(x) = 1$.

Supposons la propriété vraie à un certain rang n , et montrons-la au rang $n + 1$.

Le terme de plus haut degré de $P_n(x)$ est $(n - 1)!x^{n-1}$ donc celui de $P'_n(x)$ est $(n - 1)(n - 1)!x^{n-2}$. Par conséquent, en remplaçant dans l'expression de $P_{n+1}(x)$ obtenue en 2)a), on voit que le terme de degré n de $P_{n+1}(x)$ est

$$-(n - 1)(n - 1)!x^n + (2n - 1)(n - 1)!x^n = (-n + 1 + 2n - 1)(n - 1)!x^n = n(n - 1)!x^n = n!x^n.$$

$P_{n+1}(x)$ est donc bien de degré n et a pour coefficient dominant $n!$. C'est ce qu'on voulait.

Par le théorème de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

3) a) Pour tout $x \in] - 1, 1[$ on a

$$(1 - x^2) \operatorname{Arcsin}''(x) - x \operatorname{Arcsin}'(x) = (1 - x^2) \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} - x \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

donc Arcsin est bien solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ sur $] - 1, 1[$.

c) Posons $u(x) = x$. Par la formule de Leibniz, on a, pour tout x :

$$\begin{aligned} (uy')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) (y')^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} xy^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1} y^{(n)}(x) \\ &= xy^{(n+1)}(x) + ny^{(n)}(x). \end{aligned}$$

De même, en posant $v(x) = 1 - x^2$, on a, pour tout x :

$$\begin{aligned} (vy'')^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v^{(k)}(x) (y'')^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} (1 - x^2) y^{(n+2)}(x) + \binom{n}{1} (-2x) y^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2} (-2) y^{(n)}(x) \\ &= (1 - x^2) y^{(n+2)}(x) - 2nxy^{(n+1)}(x) - n(n - 1) y^{(n)}(x). \end{aligned}$$

d) En dérivant n fois l'équation de la question 3)a) on obtient $(1 - x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n - 1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$, soit $(1 - x^2)y^{(n+2)} - (2n + 1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$.

$$\text{e) Pour tout } x \in] - 1, 1[\text{ on a donc } (1 - x^2) \frac{P_{n+2}(x)}{(1 - x^2)^{n+\frac{3}{2}}} - (2n + 1)x \frac{P_{n+1}(x)}{(1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - n^2 \frac{P_n(x)}{(1 - x^2)^{n-\frac{1}{2}}} = 0.$$

En multipliant par $(1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ cela donne $P_{n+2}(x) - (2n + 1)xP_{n+1}(x) - n^2(1 - x^2)P_n(x) = 0$ soit $P_{n+2}(x) = (2n + 1)xP_{n+1}(x) + n^2(1 - x^2)P_n(x)$.

4) a) Dans la relation précédente, on prend $x = 0$, et on obtient $P_{n+2}(0) = n^2P_n(0)$.

b) Remarquons d'abord que, d'après la question 2), $\operatorname{Arcsin}^{(n)}(0) = P_n(0)$ pour tout n .

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P_{2p}(0) = (2p - 2)^2 P_{2p-2}(0) = (2p - 2)^2 (2p - 4)^2 P_{2p-4}(0) = \dots = (2p - 2)^2 (2p - 4)^2 \dots 2P_2(0) = 0$$

car $P_2(0) = 0$. De même

$$P_{2p+1}(0) = (2p - 1)^2 P_{2p-1}(0) = (2p - 1)^2 (2p - 3)^2 P_{2p-3}(0) = \dots = (2p - 1)^2 (2p - 3)^2 \dots 1^2 P_1(0) = (2p - 1)^2 (2p - 3)^2 \dots 1^2$$

car $P_1(0) = 1$. Or

$$\begin{aligned} 1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots \times (2p-1)^2 &= \left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2p-1) \times (2p)}{2 \times 4 \times \dots \times (2p)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2p-1) \times (2p)}{(2 \times 1) \times (2 \times 2) \times \dots \times (2 \times p)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(2p)!}{2^p p!} \right)^2 \end{aligned}$$

donc $\text{Arcsin}^{(2p)}(0) = 0$ et $\text{Arcsin}^{(2p+1)}(0) = \left(\frac{(2p)!}{2^p p!} \right)^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.