TD17 : ALI - Filtrage actif - corrigé

⋆ Exercice 1 : Amplification d'un signal

1. Le gain d'un montage amplificateur inverseur vaut $G = |\underline{H}| = \frac{R_2}{R_1}$. Il faut donc choisir :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2}{G} = 20\,\Omega}$$

2. Pour déterminer l'amplitude du signal de sortie, il faut tenir compte de la présence de la résistance de sortie du GBF. On peut rassembler les résistances R_s et R_1 en série et, par analogie avec le calcul vu en cours, on trouve rapidement que :

$$s(t) = -\frac{R_2}{R_1 + R_s}e(t) \iff \boxed{S_m = \frac{R_2}{R_1 + R_s}E_m = 2{,}9E}$$

Le gain obtenu est bien inférieur à celui que l'on souhaitait. Ceci s'explique par la présence de la résistance de sortie R_s. En effet, cette resistance n'est pas du tout négligeable devant l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = R_1 = 20\,\Omega$ du montage amplificateur inverseur (elle est même plus élevée). Cela provoque une **chute de tension** à l'entrée du montage, qui compense en partie l'effet d'amplification que l'on voulait obtenir.

3. Pour éviter cette chute de tension, il y a plusieurs méthodes possibles :

- on peut augmenter les valeurs de R_1 et R_2. Par exemple, avec $R_1 = 2\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 20\,\text{k}\Omega$, l'amplitude de sortie vaut :
$$S_m = \frac{R_2}{R_1 + R_s}E_m = 9{,}8E$$
le gain est beaucoup plus proche de 10 car on est désormais dans le cas où $R_s \ll |\underline{Z_e}| = R_1$.
- on peut placer un montage **suiveur** entre le GBF et l'amplificateur inverseur afin de régler le problème des impédances. Dans ce cas, on aura rigoureusement $S_m = 10E_m$.
- on peut remplacer le montage amplificateur inverseur par un montage **amplificateur non inverseur**, dont l'impédance d'entrée est infinie. Dans ce cas, en choisissant par exemple $R_1 = 20\,\Omega$ et $R_2 = 180\,\Omega$, on aura :
$$S_m = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E_m = 10E_m$$

⋆⋆ Exercice 2 : Montage mystère (1)

1. Le calcul est analogue à celui du montage intégrateur, à la différence que l'on intervertit la place des impédances du condensateur et du résistor :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C}} = -\mathrm{j}RC\omega}$$

On calcule également les impédances d'entrée et de sortie par analogie avec le montage intégrateur :

$$\boxed{\underline{Z_e} = \underline{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{Z_s} = 0}$$

À partir de la fonction de transfert, on peut écrire la relation entre les tensions réelles $e(t)$ et $s(t)$:

$$\underline{S} = -\mathrm{j}RC\omega\underline{E} \iff \boxed{s(t) = -RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

Ce montage permet de dériver la tension d'entrée **quelle que soit la fréquence**. Sans surprise, on l'appelle **montage dérivateur**.

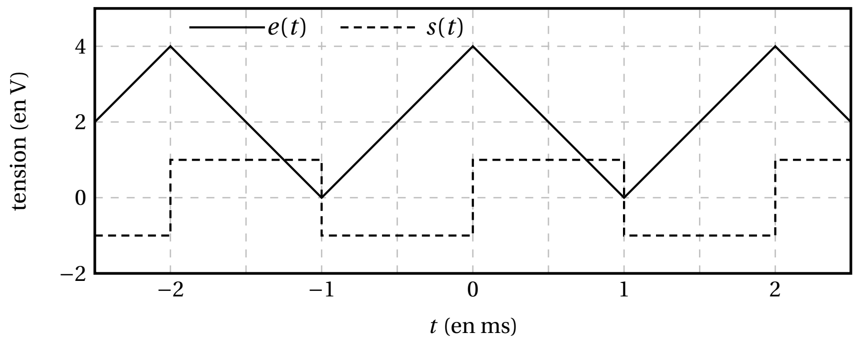
2. Dans un premier temps, on va traiter la composante continue. Elle **disparaît** par dérivation, ce qui signifie que la tension de sortie est de moyenne nulle. On s'intéresse maintenant à la partie variable du triangle, qui a une amplitude $E_m = 2\,\text{V}$. Pour obtenir la tension de sortie, il faut déterminer le taux d'accroissement de $e(t)$ sur chaque partie rectiligne. Sur une demi-période $\frac{T}{2}$, la tension $e(t)$ varie de $2E_m$ (différence entre la valeur max et la valeur min). Par conséquent, le taux d'accroissement vaut :

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{2E_m}{\frac{T}{2}} = \frac{4E_m}{T} = 4fE_m$$

On en déduit l'expression de la tension de sortie :

$$s(t) = \pm 4RCfE_m$$

avec un signe + lorsque $e(t)$ est décroissante et − lorsque $e(t)$ est croissante. On en déduit que la tension de sortie est rectangulaire, d'amplitude $\boxed{S_m = 4RCfE_m = 1\,\text{V}}$. On trace ci-dessous l'allure de ces deux tensions :



⋆⋆ Exercice 3 : Variante du montage intégrateur

1. Après avoir rassemblé les deux impédances en dérivation, on retrouve un montage très classique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_R}} = -\frac{\frac{R'}{R}}{1 + \mathrm{j}R'C\omega}} \quad , \quad \boxed{\underline{Z_e} = R} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{Z_s} = 0}$$

Cette fonction de transfert est du type :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad H_0 = -\frac{R'}{R} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{R'C}$$

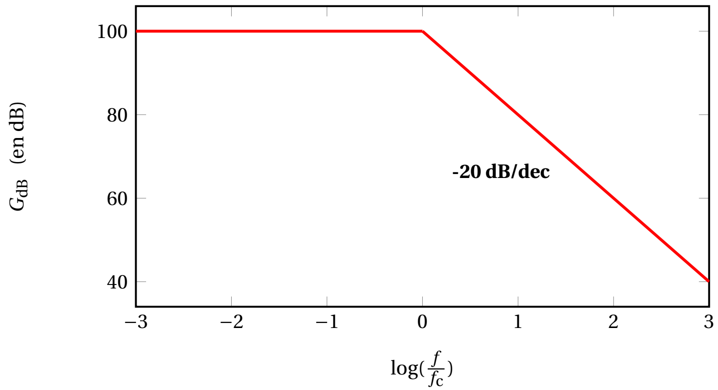
On reconnaît un **filtre passe-bas du premier ordre**.

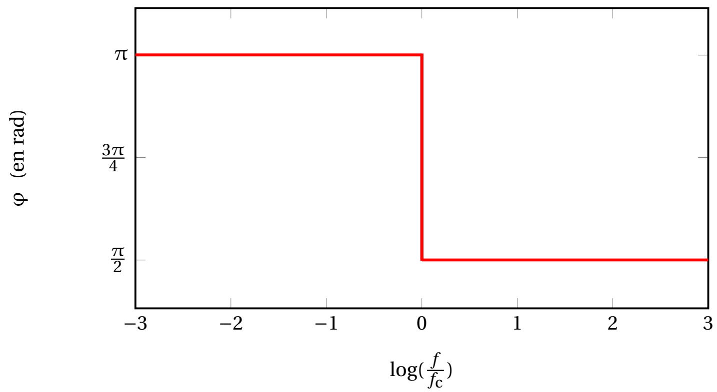
2. La fréquence de coupure vaut :

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi R' C} = 1{,}0\,\text{Hz}}$$

On trace alors l'allure du diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase, en faisant attention aux deux points ci-dessous :

- pour le diagramme de Bode en gain, l'asymptote en BF est $20\log\left(\frac{R'}{R}\right) = 100\,\text{dB}$,
- pour le diagramme de Bode en phase, le signe - revient à rajouter un déphasage égal à π à toute fréquence, la phase du filtre varie donc entre π et $\frac{\pi}{2}$.





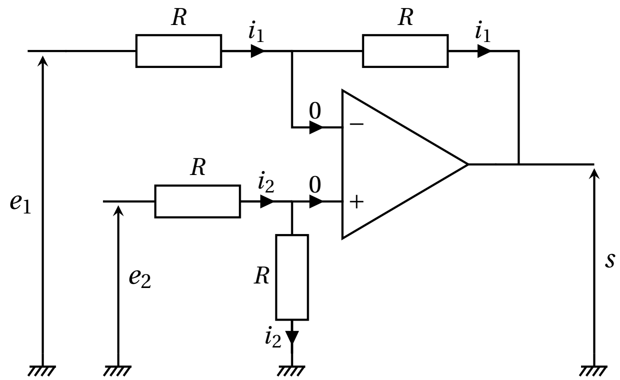
Pour $\omega = 0$ (composante continue), le gain vaut $G(\omega = 0) = \frac{R'}{R} = 10^5$. Sachant que l'ALI sature dès que sa tension de sortie dépasse $V_{sat} = 15\,\text{V}$, la composante continue ne doit pas dépasser :

$$\boxed{E_{0,max} = \frac{V_{sat}}{G(\omega = 0)} = 0{,}15\,\text{mV}}$$

On choisit généralement R' la plus élevée possible de manière à ce que la fréquence de coupure soit la plus faible possible. Ainsi, le montage se comporte en intégrateur sur une large bande de fréquences. Toutefois, si R' est trop élevée, les chances de voir l'ALI saturer à cause d'une composante continue faible mais non nulle s'accroissent. Ainsi, le choix de la valeur de R' résulte d'un compromis entre avoir un comportement intégrateur sur la plus large bande de fréquences possible et éviter de faire saturer l'ALI.

⋆⋆ Exercice 4 : Montages mystères (2)

Montage 1



On écrit d'abord l'égalité des intensités dans les deux résistances "du haut" :

$$i_1 = \frac{e_1 - V_-}{R} = \frac{V_- - s}{R} \iff V_- = \frac{e_1 + s}{2}$$

On écrit ensuite l'égalité des intensités dans les deux résistances "du bas" :

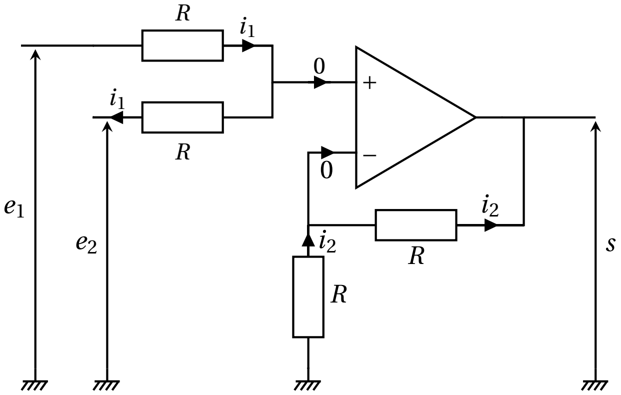
$$i_2 = \frac{e_2 - V_+}{R} = \frac{V_+}{R} \iff V_+ = \frac{e_2}{2}$$

Enfin, puisque l'ALI fonctionne en régime linéaire (il y a une rétroaction négative), alors :

$$V_+ = V_- \iff e_1 + s = e_2 \iff \boxed{s(t) = e_2(t) - e_1(t)}$$

Ce montage permet de calculer la différence de deux tensions, on l'appelle **montage soustracteur**.

Montage 2



On écrit d'abord l'égalité des intensités dans les deux résistances "du haut" :

$$i_1 = \frac{e_1 - V_+}{R} = \frac{V_+ - e_2}{R} \iff V_+ = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

On écrit ensuite l'égalité des intensités dans les deux résistances "du bas" :

$$i_2 = \frac{-V_-}{R} = \frac{V_- - s}{R} \iff V_- = \frac{s}{2}$$

Enfin, puisque l'ALI fonctionne en régime linéaire (il y a une rétroaction négative), alors :

$$V_+ = V_- \iff \boxed{s(t) = e_2(t) + e_1(t)}$$

Ce montage permet de calculer la somme de deux tensions, on l'appelle **montage sommateur**.

⋆⋆ Exercice 5 : Influence de l'oscilloscope sur le mesurage

1. La fonction de transfert du filtre RL s'écrit :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_R}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \boxed{\frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}}$$

Cette fonction de transfert est du type :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = H_0 \frac{\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L}$$

On reconnaît un **filtre passe-haut du premier ordre** de fréquence de coupure $\boxed{f_c = \frac{R}{2\pi L} = 8{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}}$.

2. En présence de l'oscilloscope, on remplace l'impédance de la bobine par celle des trois dipôles en dérivation :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \underline{Z_R}} = \frac{1}{1 + \underline{Y_{eq}}\,\underline{Z_R}} = \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{R_o} + \mathrm{j}C_o\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_o} + \mathrm{j}RC_o\omega + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}}$$

Sachant qu'ici, $\frac{R}{R_o} = 5 \cdot 10^{-3}$, on peut faire l'approximation $1 + \frac{R}{R_o} \simeq 1$, ce qui revient à écrire :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC_o\omega + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}}}$$

ce qui était le résultat attendu, avec $\boxed{\omega_1 = \frac{R}{L}}$ et $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{RC_o}}$.

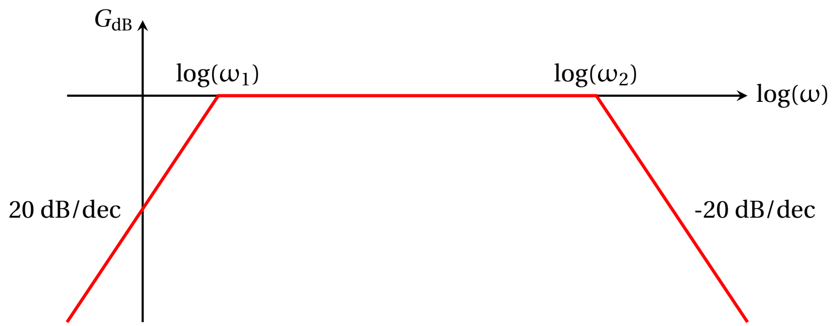
3. On effectue l'application numérique :

$$\boxed{f_1 = 8{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}} \quad \text{et} \quad \boxed{f_2 = 1{,}6\,\mathrm{MHz}}$$

On trouve que $\frac{f_2}{f_1} = 2 \cdot 10^4$. On peut effectivement dire que $f_1 \ll f_2$. On simplifie l'expressiond e la fonction de transfert dans chacun des trois cas :

- si $\omega \ll \omega_1$:
$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \simeq \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1} \iff G_{dB} \simeq 20\log(\omega) - 20\log(\omega_1)$$
- si $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$:
$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \simeq 1 \iff G_{dB} \simeq 0$$
- si $\omega \gg \omega_2$:
$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \simeq \frac{\omega_2}{\mathrm{j}\omega} \iff G_{dB} \simeq -20\log(\omega) + 20\log(\omega_2)$$

On en déduit l'allure du diagramme de Bode asymptotique en gain :



4. D'après l'allure du diagramme de Bode en gain, le comportement du montage est analogue à celui d'un filtre RL passe-haut du premier ordre tant que $\boxed{f \lesssim f_2}$. Au-delà de f_2, l'effet de l'oscilloscope apparaît sous la forme d'un comportement intégrateur.

5. L'impédance de sortie du filtre RL série vaut :

$$\boxed{\underline{Z_s} = \underline{Z_R} \parallel \underline{Z_L} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}}$$

L'impédance d'entrée de l'oscilloscope vaut :

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathrm{o}} = \underline{Z}_{\mathrm{R}} \parallel \underline{Z}_{\mathrm{C}} = \frac{R_{\mathrm{o}}}{1 + \mathrm{j} R_{\mathrm{o}} C_{\mathrm{o}} \omega}}$$

À la fréquence f_2, le module de ces deux impédances vaut :

$$\boxed{\left|\underline{Z}_{\mathrm{s}}\right| = \frac{L\omega_2}{\sqrt{1+\left(\frac{L\omega_2}{R}\right)^2}} = 5{,}0\,\mathrm{k\Omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left|\underline{Z}_{\mathrm{o}}\right| = \frac{R_{\mathrm{o}}}{\sqrt{1+(R_{\mathrm{o}} C_{\mathrm{o}} \omega_2)^2}} = 5{,}0\,\mathrm{k\Omega}}$$

On n'est pas vraiment surpris du résultat obtenu. On a vu que la présence de l'oscilloscope se fait sentir à partir de la fréquence f_2. On le comprend d'autant mieux qu'à cette fréquence, l'impédance d'entrée de l'oscilloscope est du même ordre de grandeur que l'impédance de sortie du filtre RL. En résumé, on peut retenir que :

- pour $f \ll f_2$, on a $\left|\underline{Z}_{\mathrm{s}}\right| \ll \left|\underline{Z}_{\mathrm{o}}\right|$ et l'oscilloscope a une influence négligeable sur le mesurage,
- dès que $f \gtrsim f_2$, on a un effet "diviseur de tension" à l'entrée de l'oscilloscope qui modifie les propriétés du montage. L'oscilloscope perturbe le mesurage.

Pour éviter ce problème, un solution simple consisterait à **placer un suiveur entre le filtre RL et l'oscilloscope**.

6. Après avoir rassemblé les deux impédances en série, on retrouve un montage "classique" :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{L}}}{\underline{Z}_{\mathrm{R}} + \underline{Z}_{\mathrm{L}}} = -\frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}}$$

La fonction de transfert est l'opposée de celle du filtre passif RL étudié précédemment. On peut corriger ce signe en utilisant la fonction "**INVERSION**" de l'oscilloscope. L'avantage de ce filtre, c'est que **son impédance de sortie est nulle à toute fréquence**. Par conséquent, l'oscilloscope ne peut pas avoir d'influence sur le mesurage. Cela nous donne une nouvelle occasion de voir en quoi un filtre actif peut être avantageux comparé à un filtre passif.