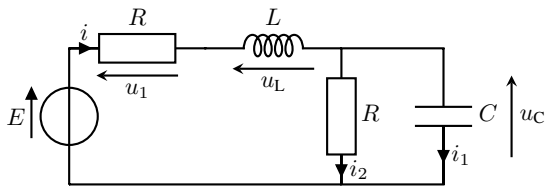
Corrigé DM5

Exercice 1 : **Régime transitoire du deuxième ordre**

Problème 1 : Amortissement d'un circuit RLC

On pose le problème en annotant le schéma :



Pour établir l'équation différentielle on commence par écrire une équation qui fait intervenir notre inconnue i, par exemple avec la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2$$

Ensuite on exprime toutes les grandeurs du circuit en fonction de i en tirant sur le fil :

$$\begin{cases} u_1 = Ri & \text{(loi d'Ohm)} \\ u_\mathrm{L} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & \text{(loi d'évolution de la bobine)} \\ u_\mathrm{C} = E - u_1 - u_\mathrm{L} = E - Ri - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & \text{(loi des mailles)} \\ i_2 = \dfrac{u_\mathrm{C}}{R} = \dfrac{E}{R} - i - \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & \text{(loi d'Ohm)} \\ i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = -RC\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} & \text{(loi d'évolution du condensateur)} \end{cases}$$

On revient alors à la loi des nœuds initiale :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R} - i - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$$

Après simplification on aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{LC}i = \frac{E}{RLC}$$

On termine en écrivant cette équation en fonction des paramètres τ et I_0 :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\tau^2}i = \frac{I_0}{\tau^2}}$$

Le discriminant vaut $\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$. On est en régime **pseudopériodique**. On calcule les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{\mathrm{j}}{\tau}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$i(t) = \frac{I_0}{2} + \left[A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

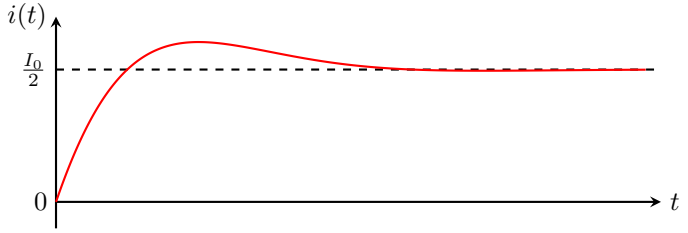
Dans ce circuit, la bobine garantit la continuité de i et le condensateur celle de u_C. Ces deux grandeurs sont nulles en $t = 0^+$ car le générateur est éteint depuis longtemps (la bobine et le condensateur sont initialement déchargés). On détermine les conditions initiales :

$$\begin{cases} i(0^+) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_\mathrm{L}(0^+)}{L} = \dfrac{E - Ri(0^+) - u_\mathrm{C}(0^+)}{L} = \dfrac{E}{L} = \dfrac{I_0}{\tau} \end{cases}$$

Avec ces conditions initiales, on obtient $B = \frac{I_0}{2}$ et $A = -\frac{I_0}{2}$, d'où :

$$\boxed{i(t) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \left(\sin\left(\frac{t}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$$

On trace l'allure du graphe de cette fonction. Pour s'en faire une idée, on connaît la valeur initiale et la tangente à l'origine (pente positive). On peut également montrer par identification que le facteur de qualité vaut $Q = \sqrt{2}/2$, il est donc légèrement supérieur à $\frac{1}{2}$. Le circuit effectue à peine une oscillation avant de retourner à l'équilibre.



Problème 2 : Un air de guimbarde

On reconnaît à l'allure du graphe que la guimbarde se comporte comme un oscillateur **très faiblement amorti**. En effet, il y a un très grand nombre d'oscillations avant que le signal s'amortisse significativement. On rappelle que dans ce cas, le facteur de qualité est environ égal au nombre d'oscillations dont l'amplitude est au moins 5% de l'amplitude initiale. Puisque celle-ci vaut 1 (unité non précisée sur le graphe), on doit compter le nombre d'oscillations dont l'amplitude est supérieure à $0,05$.

On lit sur le graphe que les oscillations ont une amplitude supérieure à $0,05$ sur une durée $\Delta t \simeq 2,5\,\mathrm{s}$ (peut-être légèrement plus). Pour déterminer le nombre d'oscillations correspondant, on calcule la période d'une oscillation. Dans le cas présent ($Q \gg 1$), on peut sans problème effectuer l'approximation $\omega \simeq \omega_0$. La fréquence propre de la guimbarde correspond à la hauteur de la note jouée, c'est-à-dire le La_2. Pour déterminer cette fréquence on se souvient que pour passer d'une note à la même note sur l'octave inférieure **on divise la fréquence par deux**. Par conséquent, on en déduit que la fréquence propre de la guimbarde vaut $f_0 = 220\,\mathrm{Hz}$. Finalement, le facteur de qualité a pour valeur approchée :

$$\boxed{Q = \frac{\Delta t}{T_0} = f_0 \Delta t \simeq 5,5 \cdot 10^2}$$

Exercice 2 : **Filtre de Hartley**

1. En BF, une bobine est équivalente à un fil : $s(t) = 0$. En HF, le condensateur est équivalent à un fil : les tensions aux bornes des deux bobines (équivalentes à des interrupteurs ouverts) sont identiques : $s(t) = 0$. Le filtre est sans doute un **passe-bande**.

2.

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + 2\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega + 2LC\,(\mathrm{j}\omega)^2} = \frac{1}{\frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + 2 + 2\mathrm{j}RC\omega} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{2L\omega}\right)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} H_0 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \dfrac{R}{2L} \end{cases} \implies \begin{cases} H_0 = \dfrac{1}{2} \\ Q = R\sqrt{\dfrac{C}{2L}} = 71 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}} = 7,1.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

3. Les asymptotes ont une pente de 20 dB/dec en BF et -20 dB/dec en HF.

$$\text{En BF : } \underline{H}(\mathrm{j}x) \approx -\frac{H_0 x}{\mathrm{j}Q} \implies G_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{H_0 x}{Q}\right) = 20\log x + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$$

$$\text{En HF : } \underline{H}(x) \approx \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \implies G_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{H_0}{Qx}\right) = -20\log x + 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$$

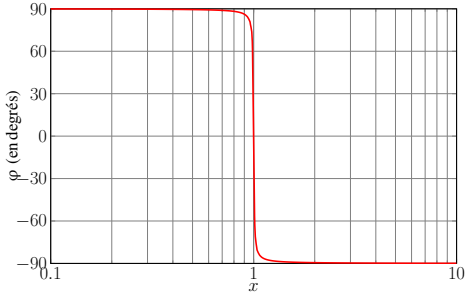
Ces expressions sont cohérentes avec les valeurs de pente mesurées sur le graphe.

4.

$$\text{En BF : } \underline{H}(\mathrm{j}x) \simeq \frac{H_0 \mathrm{j}x}{Q} \implies \varphi \simeq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{En HF : } \underline{H}(\mathrm{j}x) \simeq \frac{H_0}{Q\mathrm{j}x} \implies \varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$$

L'allure du diagramme de Bode en phase est représentée ci-contre. La variation de la phase est rapide autour de la pulsation de résonance car le facteur de qualité est grand devant l'unité.



5. a est le gain maximal en décibels : $a = G_{\text{dB,max}} = 20\log(H_0) = -6$ dB.

b est l'ordonnée du point d'intersection des deux asymptotes (en $x = 1$) : $b = 20\ \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) = -43$ dB. Les valeurs sont cohérentes avec celles mesurées sur le graphe.

6. Ce quadripôle peut servir d'intégrateur pour des signaux de fréquence $f \gg f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 11$ kHz. Il peut également servir de dérivateur pour des signaux de fréquence $f \ll f_0$. En effet :

$$\text{En BF : } \underline{H}(\mathrm{j}\omega) \simeq -\frac{H_0 x}{\mathrm{j}Q} \implies \underline{s} \simeq \frac{H_0}{Q\omega_0}\mathrm{j}\omega\underline{e} \implies s(t) \simeq \frac{H_0}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{En HF : } \underline{H}(\mathrm{j}\omega) \simeq \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \implies \underline{s} \simeq \frac{H_0\omega_0}{Q}\frac{\underline{e}}{\mathrm{j}\omega} \implies s(t) \simeq \frac{H_0\omega_0}{Q}\int e(t)\mathrm{d}t$$

Le filtre se comporte comme un intégrateur en HF et un dérivateur en BF. Toutefois, l'atténuation devient très importante dès que l'on s'éloigne de la résonance car le facteur de qualité est élevé. Ainsi, un signal ne pourra pas être intégré ou dérivé sans être également très atténué.

7. On peut réaliser un tel signal à l'aide d'un GBF, en activant la fonction OFFSET.

8. La composante continue est totalement atténuée car le filtre est un passe-bande ($\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\to} 0$). Pour $\omega = \omega_0$: $\underline{H} = H_0 = \frac{1}{2}$ et $\varphi = 0$ donc : $\boxed{s_1(t) = \dfrac{E_{1m}}{2}\cos(\omega_1 t)}$

9.

$$E_2 = \sqrt{\langle e_2^2(t)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e_2^2(t)\mathrm{d}t}$$

or, $e_2(t) = \pm E_{2m} \implies e_2^2(t) = E_{2m}^2\ \forall t \implies \boxed{E_2 = \sqrt{E_{2m}^2} = E_{2m} = 1\,\text{V}}$

10. Le spectre ne contient que des harmoniques impaires. L'amplitude des harmoniques décroît en $1/n$. Les trois premières pulsations non nulles sont :

$$\frac{\omega_0}{3} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \omega_0 = 7,1.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \frac{5\omega_0}{3} = 1,2.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

11. D'après le graphique :

$$\begin{cases} G_{\text{dB}}\left(x = \dfrac{1}{3}\right) \simeq -52\,\text{dB} \\ G_{\text{dB}}(x = 1) \simeq -6\,\text{dB} \\ G_{\text{dB}}\left(x = \dfrac{5}{3}\right) \simeq -44\,\text{dB} \end{cases} \implies \begin{cases} G\left(x = \dfrac{1}{3}\right) \approx 3.10^{-3} \\ G(x = 1) \approx 0,5 \\ G\left(x = \dfrac{5}{3}\right) \approx 7.10^{-3} \end{cases}$$

Par conséquent, les amplitudes des trois premiers pics valent :

$$\begin{cases} A\,(\omega_2) = \dfrac{4E_{2m}}{\pi}G\left(x = \dfrac{1}{3}\right) = 4.10^{-3}\,\text{V} \\ A\,(3\omega_2) = \dfrac{4E_{2m}}{3\pi}G\,(x = 1) = 0,2\,\text{V} \\ A\,(5\omega_2) = \dfrac{4E_{2m}}{5\pi}G\left(x = \dfrac{5}{3}\right) = 2.10^{-3}\,\text{V} \end{cases}$$

Le spectre de $s_2(t)$ possède un pic principal à la fréquence $3\omega_2$. Les amplitudes des autres pics sont très faibles devant celle-ci. Par conséquent, $s_2(t)$ est quasi-sinusoïdale, à une fréquence triple de celle de $e_2(t)$, d'où le nom donné à ce filtre.

12. L'amplitude des harmoniques d'un signal triangle décroissent plus rapidement que celles d'un signal créneau (décroissance en $1/n^2$). Le fondamental, de pulsation ω_0, serait atténué d'un facteur $1/2$ et non déphasé tandis que les harmoniques seraient très atténuées. Par conséquent, on peut s'attendre à ce que le signal de sortie soit quasi-sinusoïdal :

$$\boxed{s_3(t) \simeq \frac{2E_{2m}}{\pi^2}\sin\,(\omega_3 t)}$$