

DM de physique n° 5 - partie 2

Exercice 1 : Utilisation d'un matériau piézoélectrique en capteur de forces

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. On propose ici d'étudier une application en tant que capteur de force. Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

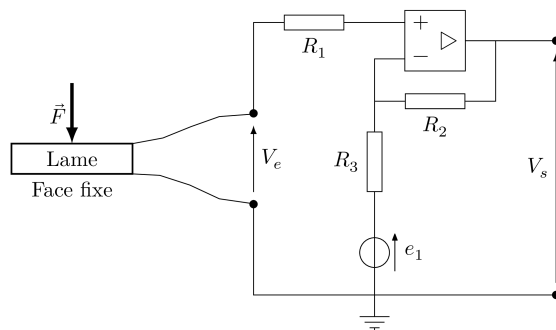


Figure 1

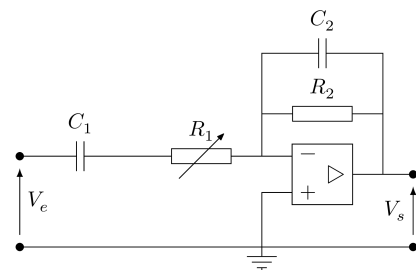


Figure 2

A - Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

On suppose qu'une force $\vec{F}$ régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force $\vec{F}$ exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force $\vec{F}$.

1. Après avoir rappelé le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal, exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances (figure 1).

Application numérique

2. On donne : $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 6,5\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0\text{ k}\Omega$ et $e_1 = 100\text{ mV}$. On mesure $V_s = 6,50\text{ V}$, en déduire V_e .
3. Sachant que $C = 8,0 \cdot 10^{-13}\text{ F}$ et que $K = 1,0 \cdot 10^{-12}\text{ C} \cdot \text{N}^{-1}$, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur la lame.

B - Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure 2.

On ajuste la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

4. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1,0 \cdot 10^2\text{ k}\Omega$, $C_1 = 50\text{ nF}$, $C_2 = 5,0\text{ nF}$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10\text{ k}\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

Exercice 2 : Comète en approche

Dans tout le problème les mouvements seront étudiés dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

Données : Masse du soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

1. On suppose que la Terre suit une orbite circulaire autour du soleil. Justifier que son mouvement est uniforme.
2. On suppose que la vitesse de la Terre est $v_0 = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon a_0 de l'orbite.

On munit le référentiel héliocentrique d'un repère cartésien $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ représenté sur la figure en annexe. On suppose qu'une comète de masse m , dont la trajectoire est dans le même plan que la trajectoire de la Terre, se trouve à l'instant $t = 0$ dans la position $\vec{r}(t=0) = \frac{a_0}{2} \vec{u}_x$ avec une vitesse $\vec{v}(t=0) = 2v_0 \vec{e}_y$. On définit également le repère cylindrique $(S, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de sorte que la position angulaire θ de la comète est nulle à $t = 0$.

3. Calculer l'énergie mécanique de la comète. Quelle est la nature de sa trajectoire ? Est-elle dans un état lié ou diffus ?
4. Montrer que le moment cinétique de la comète se conserve. Comparer la constante des aires de la comète et celle de la Terre.

On étudie l'éventualité d'une collision entre la comète et la Terre. Dans les questions qui suivent on se place à l'instant t_0 où la comète croise l'orbite terrestre. On admet que l'équation polaire de la trajectoire de la comète est $r(\theta) = \frac{a_0}{1 + \cos \theta}$.

5. Quelle est la position angulaire $\theta(t_0)$ de la comète à la date t_0 ? Tracer l'allure de la trajectoire de la comète sur la figure en annexe (à découper et rendre avec la copie).
6. Exprimer la vitesse $v(t_0)$ de la comète en fonction de v_0 .
7. Montrer que $\vec{v}(t_0) = v_0(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$.
8. Calculer la vitesse de la comète relativement à la Terre $\|\vec{v}(t_0) - \vec{v}_{\text{Terre}}\|$ dans l'éventualité d'une collision. On suppose que la rotation de la comète est dans le même sens que celle de la Terre.

Questions bonus (facultatives)

On se propose d'établir l'expression de $r(\theta)$ admise précédemment.

9. Montrer à l'aide du principe fondamental de la dynamique que le vecteur $\vec{v} - v_0 \vec{u}_\theta$ se conserve au cours du temps. En déduire à tout instant l'expression de $\vec{v}$ en fonction de v_0 , $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_y$.
10. Exprimer $\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta$ et en déduire l'équation polaire de la trajectoire de la comète $r(\theta) = \frac{a_0}{1 + \cos \theta}$.

On cherche à calculer la date t_0 de l'éventuelle collision entre la comète et la Terre. Pour cela on s'appuie sur l'expression suivante :

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

On donne par ailleurs l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{2}{3}$.

11. Exprimer t_0 en fonction de v_0 et a_0 . Déterminer numériquement t_0 en jours terrestres ($T_{\text{sol}} = 86400 \text{ s}$).

Questions super-bonus : une méthode alternative pour calculer t_0

12. Déterminer l'équation cartésienne $x = f(y)$ de la trajectoire de la planète. On pourra s'appuyer sur la figure en annexe et la nature de la trajectoire établie à la question 3.
13. Exprimer l'aire balayée par le vecteur $\vec{r}$ entre $t = 0$ et t_0 , en fonction de a_0 . En déduire l'expression de t_0 à l'aide de la deuxième loi de Kepler.

ANNEXE

