

Devoir n°21 (non surveillé)

EXERCICE

Trouver trois réels a , b et c tels que 1 soit racine triple du polynôme $P = X^6 - 2X^5 + aX^4 + bX^3 + cX^2 + 8X - 4$. Décomposer alors P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

PROBLÈME

Dans tout le problème on identifie polynômes et fonctions polynomiales associées.

1) Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x)dx = 0$. On donnera l'expression des coefficients de Q en fonction de $a_0, \dots, a_n$.

On peut ainsi définir par récurrence une unique suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $B_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_{n+1} est l'unique polynôme tel que $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = B_n(0)$. Les B_n sont appelés **polynômes de Bernoulli**, les b_n sont les **nombre de Bernoulli**.

2) Déterminer B_1 et B_2 , puis b_0 , b_1 et b_2 .

3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de B_n et son coefficient dominant.

4) Montrer que $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \geq 2$. On pourra écrire $B_n(1) - B_n(0)$ sous forme d'une intégrale.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$.

6) a) À l'aide des questions 4) et 5), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$.

b) En déduire b_3 et b_4 .

c) Écrire en Python une fonction `binomial` qui, recevant deux entiers naturels n et k tels que $k \leq n$, renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$ (par exemple `binomial(4, 2)` doit renvoyer 6).

d) Écrire une fonction `bernoulli` qui, recevant un entier naturel n , renvoie la valeur de b_n .

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $C_n = (-1)^n B_n(1 - X)$.

a) Montrer que $C'_{n+1} = (n+1)C_n$ et $\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = 0$ et en déduire que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

8) a) Montrer par récurrence que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^p k^n = \frac{B_{n+1}(p+1) - b_{n+1}}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ (**formule de Faulhaber**).

c) Retrouver à l'aide de cette formule les valeurs de $\sum_{k=0}^p k^n$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.