Chapitre 18 : Théorème du moment cinétique

1 Définitions

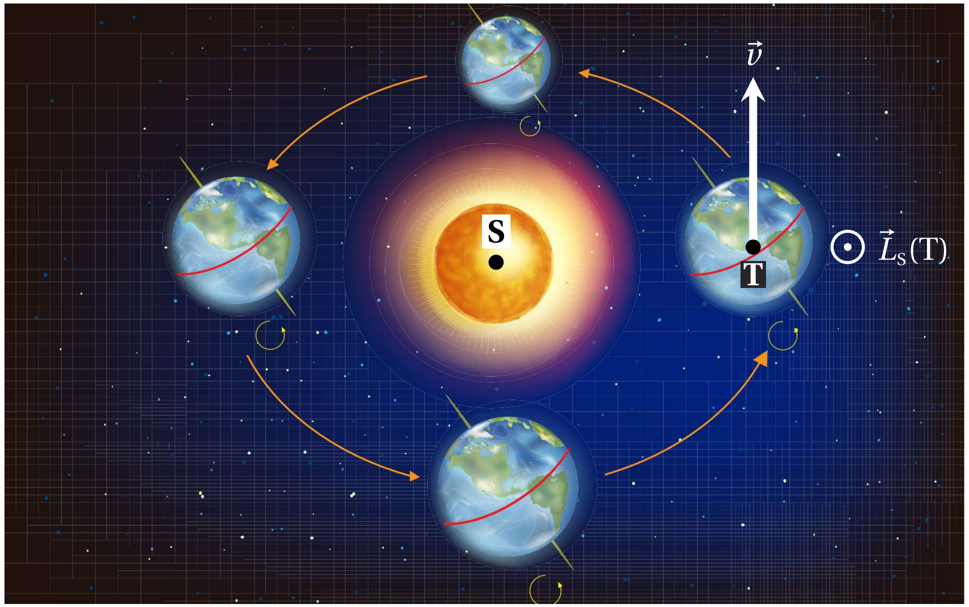
1.1 Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point A

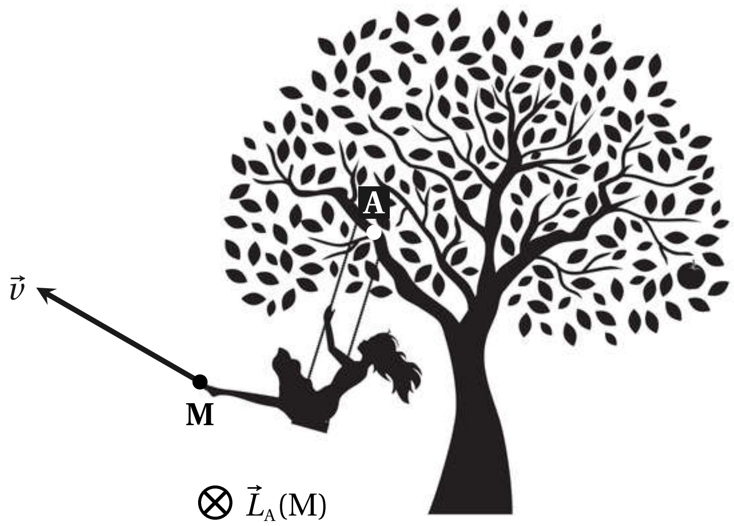
Def : On appelle **moment cinétique** d'un point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $(\mathscr{R})$, **par rapport à un point A quelconque de l'espace**, le vecteur :

$$\boxed{\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}}$$

- Le moment cinétique dépend du référentiel,
- $\vec{L}_A(M)$ est orthogonal au plan $\left(\overrightarrow{AM}, \vec{v}\right)$. Son sens est donné par la règle du produit vectoriel. Si $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$ alors le moment cinétique est nul.
- $\vec{L}_A(M)$ est un vecteur qui quantifie le mouvement de **rotation** d'un point matériel M autour d'un point A de l'espace. La direction du moment cinétique permet de déterminer le plan tangent à la trajectoire tandis que son sens permet de déterminer le sens de rotation de M autour de A.

On illustre l'orientation et le sens du moment cinétique sur deux exemples :



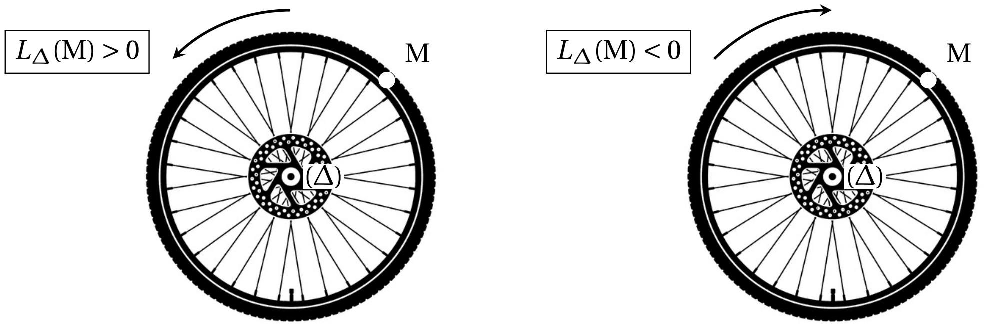


1.2 Moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté

Def : Soit A un point quelconque appartenant à un axe (Δ), orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ colinéaire à l'axe. On appelle **moment cinétique** d'un point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $(\mathscr{R})$, **par rapport à l'axe orienté** (Δ), la quantité scalaire :

$$\boxed{L_\Delta(M) = (\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta}$$

- $L_\Delta(M)$ est nul si le mouvement de M est parallèle à l'axe ou dans une direction coupant l'axe. ($L_\Delta(M)$ est défini comme un produit mixte, il est donc nul si les trois vecteurs sont coplanaires, c'est-à-dire si $\vec{v}$ est dans le plan contenant M et (Δ)).
- $L_\Delta(M)$ quantifie le mouvement de rotation du point M autour de l'axe (Δ). Le vecteur $\vec{u}_\Delta$ étant pris comme référence, le signe de $L_\Delta(M)$ renseigne sur le sens de rotation de M autour de l'axe.



1.3 Moment cinétique d'un système de points matériels par rapport à un axe orienté

Def : Soit A un point quelconque appartenant à un axe (Δ), orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ colinéaire à l'axe. Le moment cinétique d'un système $(\mathscr{S})$ de points matériels M_i de masses m_i, se déplaçant à des vitesses $\vec{v}_i$ dans un référentiel $(\mathscr{R})$, par rapport à l'axe orienté (Δ) est égal à la somme des moments cinétiques de chacun des constituants du système :

$$L_\Delta(\mathscr{S}) = \sum_i \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \wedge m_i \vec{v}_i\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \sum_i L_\Delta(\mathrm{M}_i)$$

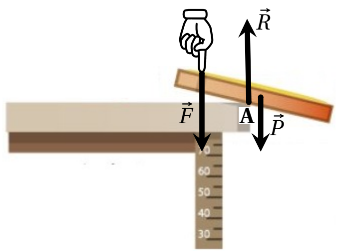
1.4 Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point A de l'espace

Def : Soit $\vec{F}$ une force qui s'applique en un point M. On appelle **moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point A quelconque de l'espace**, le vecteur :

$$\vec{\mathscr{M}}_\mathrm{A}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{F}$$

Tandis qu'une force $\vec{F}$ permet de quantifier la contribution d'une action mécanique au mouvement de **translation d'un système**, le moment $\vec{\mathscr{M}}_\mathrm{A}(\vec{F})$ permet de quantifier la contribution d'une action mécanique au mouvement de **rotation d'un système autour du point A**.

Application : à vous de trouver la direction et le sens du moment, par rapport au point A, de chacune des trois forces qui s'exercent sur cette tartine beurrée en équilibre précaire!



1.5 Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté - notion de bras de levier

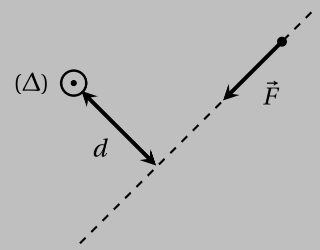
Def : Soit A un point quelconque appartenant à un axe (Δ), orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ colinéaire à l'axe et $\vec{F}$ une force qui s'applique en un point M. On appelle **moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe orienté** (Δ) la quantité scalaire :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Rq : Seule la composante **orthoradiale** de $\vec{F}$ contribue au mouvement de rotation autour de l'axe.

Dans le cas le plus courant où la force $\vec{F}$ est orthogonale à (Δ), il existe une manière pratique de calculer le moment scalaire et qui consiste à utiliser le **bras de levier**.

Def : Considérons une force $\vec{F}$ **orthogonale à (Δ)**. Le bras de levier est la distance entre l'axe (Δ) et la **droite d'action de la force**, c'est-à-dire la droite imaginaire qui passe par le point d'application de $\vec{F}$ et qui est orientée par $\vec{F}$ (voir figure ci-dessous).



On montre alors que le moment scalaire s'écrit de la manière suivante :

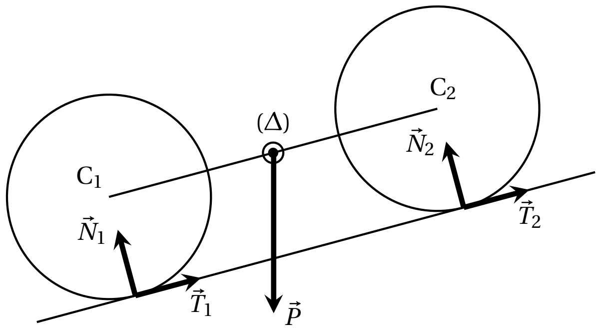
$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \, \|\vec{F}\|$$

avec un signe $\pm$ qui est donné par la règle du produit vectoriel.

Rq : si $\vec{F}$ n'est pas orthogonale à (Δ), on peut toujours utiliser la méthode précédente en l'appliquant au projeté de $\vec{F}$ sur le plan orthogonal à (Δ) passant par le point d'application.

Application : Voici une modélisation rudimentaire d'un velo posé sur une route inclinée (voir figure au dos). Chaque roue a un rayon R. Les centres des deux roues sont distances de $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 = 4R$. Le centre d'inertie du vélo se trouve au centre du segment $[\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2]$. Le vélo est soumis à son poids et à la réaction du sol (composante normale et tangentielle) qui s'applique à chacune des roues, au niveau du point de contact avec le sol.

Exprimer le moment scalaire de chacune de ces forces par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre d'inertie.



2 Théorème du moment cinétique

2.1 TMC appliqué à un point matériel M, par rapport à un point fixe A, dans un référentiel galiléen

Soit M un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures, et A un point quelconque de l'espace, fixe dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport au point A, dans le référentiel $(\mathscr{R})$, s'énonce de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_{\mathrm{A}}\left(\vec{F}_{\mathrm{ext}}\right) = \sum \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{F}_{\mathrm{ext}}}$$

Rq : Le TMC contient la même information que le PFD. De même que PFD est adapté à l'étude des mouvements de translation, le TMC est adapté à l'étude des mouvements de rotation autour d'un point ou d'un axe fixe.

2.2 Application : pendule simple

Comme le PFD ou le TEC, le TMC permet d'obtenir l'équation du mouvement du pendule simple. On retient que le PFD, le TEC et le TMC sont trois outils mathématiques qui permettent d'obtenir les même informations sur un système mécanique, mais de manière différente. On utilisera selon les cas le théorème le plus approprié.

2.3 Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique se conserve lorsque la somme des moments des forces extérieures qui s'appliquent sur le système est nulle.

En mécanique, les lois de conservation permettent d'obtenir des informations sur le mouvement ; on a vu par exemple que la conservation de l'énergie mécanique conduit à une intégrale première du mouvement. Il en est de même pour la conservation du moment cinétique.

2.4 TMC appliqué à un point matériel M par rapport à un axe orienté (Δ) fixe dans un référentiel galiléen

Soit M un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures et (Δ) un axe orienté fixe dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport à (Δ), dans le référentiel $(\mathscr{R})$, s'énonce de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{\Delta}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\mathrm{ext}}) = \sum \left[\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{F}_{\mathrm{ext}}\right] \cdot \vec{u}_{\Delta}}$$