Chapitre 19 : Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

1 Champ de force centrale conservatif

1.1 Définition

Def : Considérons un système ($\mathscr{S}$) qui peut intéragir à distance avec son environnement (intéraction gravitationnelle, électrostatique,...). On appelle **champ de force** l'ensemble des vecteurs force $\vec{F}(\mathrm{M})$ exercés par ($\mathscr{S}$) en tout point M de l'espace.

Def : On appelle **champ de force centrale** un champ de force $\vec{F}(\mathrm{M})$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- Il existe un point O de l'espace tel que $\vec{F}(\mathrm{M})$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$,
- $\|\vec{F}\|$ ne dépend que de $r = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|$

En choisissant O comme l'origine d'un repère en coordonnées sphériques, un champ de force centrale s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$$

1.2 Force d'intéraction gravitationnelle, force d'intéraction électrostatique

Def : La force d'intéraction gravitationnelle est une force créée par tout corps massif sur un autre corps massif. La force d'intéraction gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 placée en un point M_1 sur une masse ponctuelle m_2 située en un point M_2 a pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right\|^3}}$$

où $G = 6,67.\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$ est appelée constante universelle de gravitation.

Rq : Cette force possède une portée infinie, c'est pourquoi elle est la force prépondérante lorsqu'on se place à très grande échelle (système stellaire, galaxie,...). C'est elle qui, entre autres, est responsable de la forme sphérique des corps très massifs (planètes, étoiles,etc...).

Elle fait partie des quatre intéractions fondamentales (intéraction gravitationnelle, électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte).

Def : La force d'intéraction électrostatique est une force créée par tout corps chargé électriquement sur un autre corps chargé. La force d'intéraction électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 placée en un point M_1 sur une charge ponctuelle q_2 située en un point M_2 a pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right\|^3}}$$

Où $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est appelée permittivité diélectrique du vide.

Rq : L'intéraction électromagnétique est prépondérante à l'échelle moléculaire et atomique. Elle est responsable de la stabilité des molécules, de la réactivité des espèces chimiques. C'est elle qui est responsable de l'état d'un corps (solide, liquide, gazeux) et des intéractions entre différents corps matériels (réaction d'un support, tension d'un fil, frottement fluide ou solide, tension superficielle,...).

Les intéractions gravtitationnelle et électrostatique font parties du domaine des **champs newtoniens**, c'est-à-dire qu'ils s'expriment sous la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Avec $k = G m_1 m_2$ (int. gravitationelle) ou $k = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ (int. électrostatique).

1.3 Énergie potentielle d'un champ newtonien

Un champ de force newtonien est conservatif. Il est associé à l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\frac{k}{r} + \mathrm{Cste}}$$

Rq : Dans la suite du cours, on fixe arbitrairement à zéro la valeur de la constante d'intégration, ce qui revient à plcaer l'origine des potentiels en $r = \infty$.

1.4 Force exercée par un ressort élastique

Un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 crée un champ de force centrale conservative, non newtonien. L'énergie potentielle associée à ce champ de force vaut :

$$\boxed{E_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 + \mathrm{Cste}}$$

2 Relations de conservation, propriétés du mouvement

2.1 Conservation du moment cinétique

Dans un champ de force centrale issu de O, le moment cinétique $\vec{L}_O(\mathrm{M})$ se conserve.

2.1.1 Planéité du mouvement

Le mouvement est contenu dans le plan orthogonal au vecteur $\vec{\mathrm{C}} = \dfrac{\vec{L}_O(\mathrm{M})}{m}$ passant par O.

2.1.2 Loi des aires

On note $\mathscr{A}(t)$ l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre $t = 0$ et une date t quelconque. On appelle **vitesse aréolaire** la quantité $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t}$. On montre que cette vitesse aréolaire se conserve au cours du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{\mathrm{C}}{2} = \mathrm{Cste}$$

Où $\mathrm{C} = r^2\dot{\theta}$ est appelée **constante des aires**. Cette propriété s'énonce également sous la forme suivante :

Au cours du mouvement, le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

2.2 Conservation de l'énergie mécanique

Si le champ de force centrale est conservatif, alors l'énergie mécanique se conserve. L'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\mathrm{p,eff}}(r) \qquad E_{\mathrm{p,eff}}(r) = \frac{m\mathrm{C}^2}{2r^2} + E_{\mathrm{p}}(r)$$

Où $E_{\mathrm{p}}(r)$ est l'énergie potentielle associée au champ de force centrale conservatif et $E_{\mathrm{p,eff}}(r)$ est une énergie potentielle effective qui permet d'interpréter *le mouvement radial* du système.

- Si le système se trouve dans un puits de potentiel (mouvement borné), on dit qu'il est dans un **état lié**. Il est piégé dans le champ d'attraction.
- Si le système peut s'éloigner à l'infini du champ attracteur, alors on dit qu'il est dans un **état diffus**. Si son énergie mécanique est suffisante, il peut quitter le champ d'attraction.

3 Cas du champ d'attraction gravitationnel

On étudie plus particulièrement dans ce paragraphe le mouvement d'un système de masse m autour d'un corps massif de masse $M \gg m$, mû uniquement par la force de gravitation. Le champ créé est newtonien, tel que $k = GMm$.

3.1 Référentiel d'étude

A l'échelle du système solaire, on utilise différents référentiels pour étudier le mouvement de corps en intéraction gravitationnelle :

- le **référentiel de Copernic** ($\mathscr{R}_\mathrm{C}$) est lié au trièdre dont l'origine se trouve au centre de masse du système solaire et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines (supposées fixes).
- le **référentiel héliocentrique** ($\mathscr{R}_\mathrm{H}$) est lié au trièdre dont l'origine se trouve au centre du soleil et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathscr{R}_\mathrm{C}$.
- le **référentiel géocentrique** ($\mathscr{R}_\mathrm{G}$) est lié au trièdre dont l'origine se trouve au centre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathscr{R}_\mathrm{C}$.
- le **référentiel terrestre** ($\mathscr{R}_\mathrm{T}$) est lié à la Terre. Il est en rotation uniforme par rapport à $\mathscr{R}_\mathrm{G}$.

Aucun de ces référentiels n'est rigoureusement galiléen. L'écart par rapport au caractère galiléen s'illustre concrètement par l'existence de forces d'inerties (forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis, forces de marée,...) que l'on négligera dans ce chapitre. Ainsi, nous ferons toujours l'approximation que ces référentiels sont effectivement galiléens.

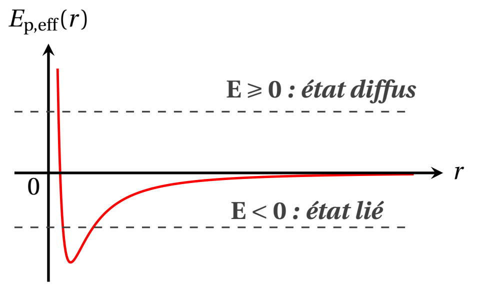
3.2 Étude des différents types de trajectoire possible

On admet le résultat suivant :

La trajectoire d'une masse m dans un champ newtonien est une **conique** dont le centre de force est l'un des foyers.

En reprenant l'étude graphique du **2.2** dans le cas du champ d'attraction gravitationnel, on peut montrer que :

$$\begin{cases} \text{si } E > 0 \text{ alors la conique est une hyperbole} \\ \text{si } E = 0 \text{ alors la conique est une parabole} \\ \text{si } E < 0 \text{ alors la conique est une ellipse} \\ \text{si } E = E_{\mathrm{p,min}} \text{ alors la conique est un cercle} \end{cases}$$



Dans chacun des cas, le centre attracteur se trouve au niveau de l'un des foyers de la conique.

3.3 Lois de Kepler

Les lois de Kepler concernent le mouvement des planètes du système solaire autour du soleil. Elles ont éte établies empiriquement par l'astronome allemand Johannes Kepler et énoncées entre 1609 et 1618.

1° loi (loi des orbites) : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.

2° loi (loi des aires) : Les aires balayées par le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ (où S est le centre du Soleil et P le centre d'une planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

3° loi (loi des périodes) : Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe a de sa trajectoire elliptique.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Cste}$$

3.4 Étude des trajectoires circulaires

À l'aide du PFD, on peut déterminer qu'un mouvement circulaire de rayon R est forcément uniforme et que sa vitesse et sa période sont données par :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ce résultat permet immédiatement de retrouver l'expression de la 3° loi de Képler, et de donner en plus l'expression de la constante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Les énergies mécanique, cinétique et potentielle sont reliées par :

$$E = -E_c = -\frac{GMm}{2R} \qquad E_p = -\frac{GMm}{R}$$

3.5 Cas des trajectoires elliptiques

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique s'écrit en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse :

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

3.6 Jour sidéral, jour solaire

Def : On appelle **jour solaire** l'intervalle de temps qu'il faut à un point la Terre pour retrouver deux fois successivement le soleil à son zénith. La durée du jour solaire moyen sur Terre vaut 24 h, soit 86400 s.

Def : On appelle **jour sidéral** la période de révolution de la Terre autour de son axe. Le jour sidéral dure 23h56mn4s, soit 86164s.

3.7 Satellites terrestres

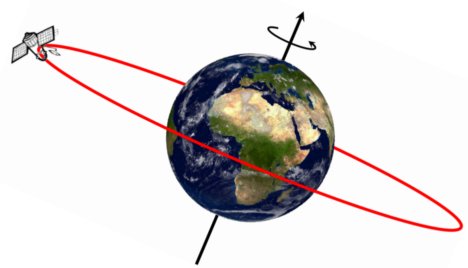
3.7.1 Différentes orbites possibles

L'orbite d'un satellite terrestre est contenue dans un plan qui passe par le centre de la Terre. Généralement, cette orbite est circulaire et son rayon dépend de la mission du satellite.

- on parle d'orbite basse entre 300 km et 2000 km d'altitude (période entre 1h et 2h) : la proximité avec la Terre permet de faciliter les échanges d'information entre le satellite et la surface, elle favorise également la résolution des instruments destinés à l'imagerie terrestre. On y trouve des satellites de communication, d'imagerie terrestre, de météorologie.
- l'orbite moyenne se situe autour de 20 000 km d'altitude (période de 12h) : elle est stable car située en dehors de l'atmosphère et permet de couvrir une large partie de la surface. On y trouve des satellites de navigation.
- l'orbite géostationnaire se trouve à environ 36 000 km d'altitude (période de 24h) : elle permet de couvrir une zone fixe de la Terre, mais comme elle se trouve dans le plan de l'équateur, elle n'est pas pratique pour l'observation des pôles. Elle est largement utilisée, pour des satellites de télécommunications ou certains satellites météorologiques.

3.7.2 Satellite géostationnaire

Def : Un satellite géostationnaire est un satellite qui est fixe dans le référentiel terrestre.



Pour que cela puisse de produire, il faut que le satellite géostationnaire se trouve dans le plan de l'équateur et que sa période de révolution soit exactement celle de la Terre sur elle-même, c'est-à-dire un jour sidéral. Grace à la 3° loi de Képler, on montre que l'altitude de l'orbite géostationnaire est d'environ 36000 km.

3.8 Vitesses cosmiques

Def : La **première vitesse cosmique** correspond à la vitesse minimale qu'il faut donner à un satellite, lancé depuis la surface de la Terre, pour le mettre en orbite autour de la Terre. En dessous de cette vitesse, le satellite retombe sur la Terre.

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \approx 8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}}$$

Def : La **deuxième vitesse cosmique** correspond à la vitesse minimale qu'il faut donner à un satellite, lancé depuis la surface de la Terre, pour lui faire quitter le champ d'attraction terrestre.

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \approx 11\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}}$$

3.9 Masse inertielle, masse gravitationnelle

Def : On appelle **masse inertielle** la grandeur qui quantifie l'inertie d'un système qu'on veut mettre en translation. C'est la masse du PFD : $m_i \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

Def : On appelle **masse pesante (ou masse gravitationnelle)** la grandeur qui quantifie l'intéraction gravitationnelle entre deux corps massifs. C'est la masse de la force d'intéraction gravitationnelle : $\vec{F} = -G\dfrac{Mm_g}{r^2}\vec{u}_r$

À l'heure actuelle, aucune théorie physique n'explique l'apparente égalité de ces deux masses, d'origines pourtant différentes. En 1915 Einstein élabora sa théorie de la relativité générale en postulant entre autres cette égalité, énoncée sous la forme du **principe d'universalité de la chute libre** :

> *Tout corps tombe de façon identique dans un champ de gravité externe, indépendamment de sa masse et de sa composition chimique.*

De nombreuses expériences ont cherché à détecter une écart entre masse inertielle et masse gravitationnelle. En 2017 l'expérience MICROSCOPE réalisée en orbite basse autour de la Terre (700 km) a confirmé la validité de l'universalité de la chute libre, avec une précision de $2 \cdot 10^{-14}$!