TD18 : TMC - corrigé

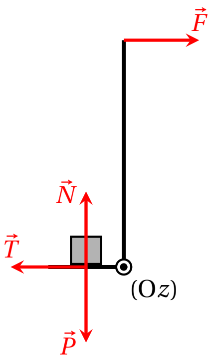
Exercice 1 : Le diable

1. À force de traction $\|\vec{F}\|$ égale, le moment exercé sur le diable est d'autant plus important que le **bras de levier est élevé**. Pour que ce dernier soit maximal (égal à b), il faut que :

- le point d'application de la force soit le plus éloigné possible de l'axe de rotation,
- la force de traction soit orthogonale au levier.

Par conséquent, on doit placer les poignées au sommet du levier et tirer sur ces poignées horizontalement.

2. Le diable est soumis à son poids (qu'on néglige ici), à la force $\vec{P}$ exercée par la charge, à la réaction du sol (composante normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$) et à la force de traction $\vec{F}$. On les représente schématiquement en supposant pour simplifier que le point d'application de la réaction du sol se trouve au centre du plateau.



Pour les forces $\vec{N}$ et $\vec{P}$, le bras de levier vaut $\frac{a}{2}$. Pour la force $\vec{F}$, il est égal à b. Pour la force $\vec{T}$, il est nul. On en déduit que :

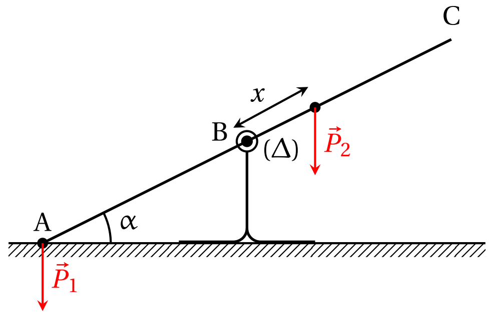
$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{N}) = -\frac{a}{2}N} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = \frac{a}{2}mg} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = -bF}$$

3. Le diable bascule lorsque la réaction normale s'annule, c'est-à-dire dès que le moment de la force de traction devient plus important (en valeur absolue) que celui du poids de la charge :

$$\left|\mathcal{M}_z(\vec{F})\right| > \left|\mathcal{M}_z(\vec{P})\right| \iff bF > \frac{mga}{2} \iff \boxed{F \geq F_{\min} = \frac{a}{2b}mg}$$

Pour soulever la charge à mains nues, il faut exercer une force $F = mg$. Le diable permet de réaliser la même action mécanique et diminuant l'effort d'un facteur $\boxed{\frac{2b}{a} = 6}$.

Exercice 2 : Le trébuchet

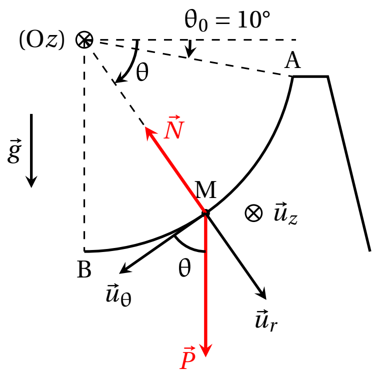


Notons (Δ) l'axe de rotation du trébuchet, orienté comme montré sur la figure ci-dessus. Le trébuchet bascule lorsque le moment exercé sur le trébuchet par l'enfant allant vers C devient supérieur (en valeur absolue) au moment exercé par l'enfant assis en A. Mathématiquement, cele revient à dire que :

$$\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2)\right| > \left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1)\right| \iff xm'g\cos\alpha > Lmg\cos\alpha \iff \boxed{x > \frac{m}{m'}L = 0,75\,\mathrm{m}}$$

où x est la distance qui sépare B de l'enfant en mouvement.

⋆ Exercice 3 : Le toboggan



1. On applique le TMC à l'enfant, par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}L_z(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{N})$$

Ce qui donne, en coordonnées cylindriques :

$$mr^2\ddot{\theta} = mgr\cos\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0}$$

2. On applique le TEC à l'enfant dans le référentiel terrestre :

$$E_c(\mathrm{M}) - \underbrace{E_c(\mathrm{A})}_{=0} = W(\vec{P}) + \underbrace{W(\vec{N})}_{=0} = -\Delta E_p = E_p(\mathrm{A}) - E_p(\mathrm{M}) = mg\,(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{M}) = mgr\,(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

On détermine la vitesse au point M :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\,(\sin\theta_0 - \sin\theta) \iff \boxed{v = \sqrt{2gr\,(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

Au point B ($\theta = \frac{\pi}{2}$), la vitesse vaut $\boxed{v_\mathrm{B} = \sqrt{2gr\,(1 - \sin\theta_0)} = 6,4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

⋆ Exercice 4 : Pendule conique

1. Le mouvement de la masse est circulaire et uniforme, de rayon $r = \ell \sin\alpha$. Dans la base cylindrique, $\vec{v} = \ell \sin\alpha\omega\vec{u}_\theta$ et le moment cinétique vaut :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \ell(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_r) \wedge m\ell\omega\sin\alpha\vec{u}_\theta$$

Après calcul, on obtient $\boxed{\vec{L}_O(M) = m\ell^2\omega\sin\alpha(\cos\alpha\vec{u}_r + \sin\alpha\vec{u}_z)}$.

On dérive par rapport au temps (seul $\vec{u}_r$ est variable dans l'expression de $\vec{L}_O(M)$) :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{u}_\theta}$$

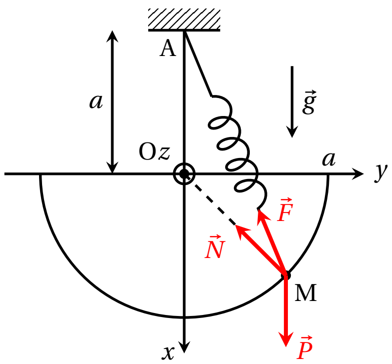
2. On applique le TMC à la masse m, par rapport à O, fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \ell(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_r) \wedge -mg\vec{u}_z = mg\ell\sin\alpha\vec{u}_\theta$.
Le moment de la tension du fil est nul car $\vec{T} \,/\!/\, \overrightarrow{OM}$. Par projection sur $\vec{u}_\theta$, on obtient :

$$m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = mg\ell\sin\alpha \iff \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}}$$

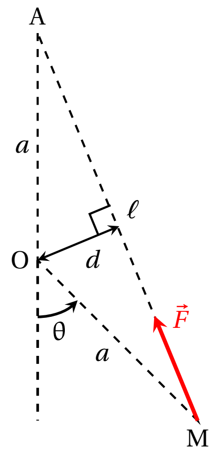
⋆⋆ Exercice 5 : Pendule à ressort



1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}$ et à la réaction normale du rail $\vec{N}$. On applique le TMC à la masse M par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dL_z(M)}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{N}) + \mathcal{M}_z(\vec{F})$$

avec $\frac{dL_z(M)}{dt} = ma^2\ddot{\theta}$, $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mga\sin\theta$ et $\mathcal{M}_z(\vec{N}) = 0$ (voir pendule simple). On va calculer le bras de levier de la force de rappel :



Dans un premier temps, on note que $\widehat{AOM} = \pi - \theta$. Comme le triangle AOM est isocèle en O, on en déduit que :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} = \frac{\theta}{2}$$

Le bras de levier vaut donc : $d = a\sin\frac{\theta}{2}$. On exprime maintenant le moment scalaire de la force de rappel (d'après la valeur de ℓ_0, on peut vérifier que le ressort est toujours étiré) :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = d \cdot k(\ell - \ell_0)$$

Il reste à exprimer la longueur $\ell = AM$ du ressort :

$$\ell = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

On termine le calcul du moment :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = a\sin\frac{\theta}{2} \cdot k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right) = ka^2\sin\theta - ka\ell_0\sin\frac{\theta}{2}$$

On revient maintenant au TMC :

$$ma^2\ddot{\theta} = (ka^2 - mga)\sin\theta - ka\ell_0\sin\frac{\theta}{2}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \frac{k}{m}\right)\sin\theta + \frac{k\ell_0}{ma}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

Enfin, en utilisant les notations de l'énoncé, on aboutit à l'expression attendue :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\left(\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\right) = 0}$$

2. Le système est en équilibre si :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P})+\mathcal{M}_z(\vec{N})+\mathcal{M}_z(\vec{F})=0 \iff \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}-\sin\theta=0$$

En utilisant la formule de l'angle double, on réécrit cette équation de la manière suivante :

$$\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{3}-2\cos\frac{\theta}{2}\right)=0 \iff \begin{cases} \sin\frac{\theta}{2}=0 & \iff \boxed{\theta_{\text{eq1}}=0} \\ \text{ou} & \\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} & \iff \boxed{\theta_{\text{eq2}}=\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

3. On simplifie l'équation du mouvement autour de $\theta_{\text{eq1}}=0$:

$$\sin(\varepsilon)\simeq\varepsilon \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\simeq\frac{\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs, $\ddot{\theta}=\ddot{\varepsilon}$, d'où :

$$\ddot{\varepsilon}+\omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon-\varepsilon\right)=0 \iff \boxed{\ddot{\varepsilon}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\omega^2\varepsilon=0}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique. On en déduit que la position d'équilibre $\theta_{\text{eq1}}=0$ est stable et la pulsation propre des petites oscillations vaut :

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}\,\omega}$$

On simplifie maintenant l'équation du mouvement autour de $\theta_{\text{eq2}}=\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{3}+\varepsilon\right)\simeq\sin\frac{\pi}{3}+\varepsilon\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\simeq\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon \end{cases}$$

d'où :

$$\ddot{\varepsilon}+\omega^2\left(\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=0$$

Après simplifications, on aboutit à :

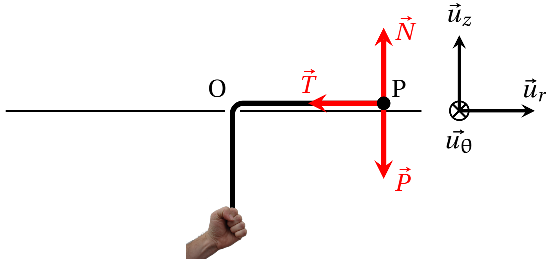
$$\ddot{\varepsilon}+\frac{\omega^2}{4}\varepsilon=0$$

Il s'agit à nouveau de l'équation d'un oscillateur harmonique. On en déduit que la position d'équilibre $\theta_{\text{eq2}}=\frac{\pi}{3}$ est stable et la pulsation propre des petites oscillations vaut :

$$\boxed{\omega_0=\frac{\omega}{2}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Mouvement d'une masse attachée à un fil

1.



1. On applique le TMC à la masse m, par rapport à O, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(\mathrm{P})}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})+\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})+\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})=\vec{0}$ car $\vec{T}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ et $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})+\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\wedge(\vec{P}+\vec{N})=\vec{0}$ car $\vec{P}$ et $\vec{N}$ se compensent (le mouvement reste horizontal).

Par conséquent $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(\mathrm{P})}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$ donc le moment cinétique du point P se conserve au cours du temps. Or :

$$\vec{L}_O(\mathrm{P})=m\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z \iff \ell^2\dot{\theta}=\mathrm{Cste}$$

À $t=0$, $\dot{\theta}=\omega_0$ et $\ell=a$ donc : $a^2\omega_0=\ell^2\dot{\theta} \iff \boxed{\dot{\theta}(t)=\frac{a^2}{\ell^2}\omega_0=\frac{a^2}{(a-bt)^2}\omega_0}$.

2. On applique le PFD à la masse m dans le référentiel terrestre, projeté sur $\vec{u}_r$:

$$-m\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r=\vec{T} \iff \boxed{\vec{T}=-m\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2}\omega_0\right)^2\vec{u}_r=-\frac{ma^4\omega_0^2}{\ell^3}\vec{u}_r}$$

3. On applique le TEC à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre la date $t=0$ et une date t quelconque :

$$W(\vec{T})=E_c-E_{c0}=\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2-\frac{1}{2}m(a\omega_0)^2$$

Le poids et la réaction ne travaillent pas car elles sont orthogonales au mouvement. En exprimant $\dot{\theta}$ en fonction de ℓ, on obtient :

$$\boxed{W(\vec{T})=\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\left(\frac{a^2}{\ell^2}-1\right)}$$