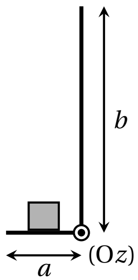
# TD18 : TMC

## Exercice 1 : Le diable

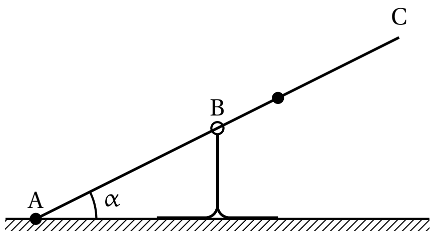
Un diable est un instrument qui permet de transporter de lourdes charges avec un minimum d'efforts. On le modélise schématiquement de la manière suivante : le plateau a une longueur $a = 50\,\text{cm}$ et le levier une hauteur $b = 1{,}5\,\text{m}$. On pose une charge de masse $m$ supposée ponctuelle au centre du plateau et on cherche à la soulever en tirant sur le levier pour faire basculer le diable autour de ses roues, supposées ponctuelles en O. On négligera dans cet exercice la masse du diable.




1. Pour économiser ses forces au maximum, où faut-il placer les poignées sur le levier ? Dans quelle direction faut-il tirer ? Justifier.
2. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le diable tant qu'il est encore posé sur le sol. Calculer le moment scalaire de chacune de ces forces par rapport à l'axe $(Oz)$.
3. Calculer la force minimale $F_{\text{min}}$ qu'il faut exercer sur le levier pour soulever la masse. Comparer au cas où l'on doit soulever la masse à mains nues. Par quel facteur le diable amplifie-t-il la force exercée par l'opérateur ?

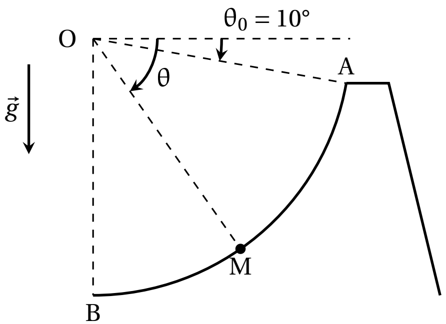
## Exercice 2 : Le trébuchet

Un enfant de masse $m = 15\,\text{kg}$ est assis à l'extrémité A d'un trébuchet de longueur $AC = 2L = 2{,}5\,\text{m}$ qui repose sur le sol et fait un angle $\alpha$ avec l'horizontale. Son grand-frère, de masse $m' = 25\,\text{kg}$, part du point B, équidistant de A et C, et marche lentement vers l'extrémité C. Où se trouve le grand-frère lorsque le trébuchet bascule ?




## ⋆ Exercice 3 : Le toboggan

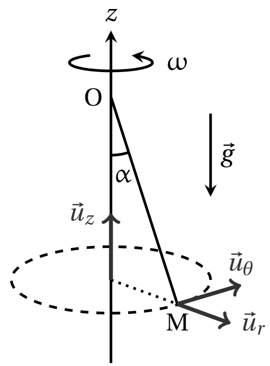
Un enfant, que l'on assimile à un point matériel M de masse $m = 40$ kg, glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2{,}5$ m. L'enfant, initialement en A avec une vitesse nulle, se laisse glisser et atteint le point B avec une vitesse $V_B$. On supposera le référentiel terrestre galiléen et les frottements négligeables.




1. À l'aide du TMC, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Exprimer la vitesse de l'enfant en fonction de $\theta$. En déduire la valeur de $V_B$.

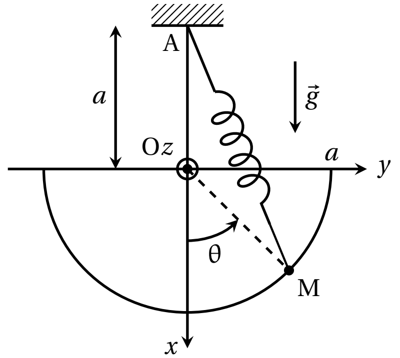
## ⋆ Exercice 4 : Pendule conique

Un point matériel M de masse $m$ est suspendu à un fil inextensible sans masse de longueur $\ell$ attaché en un point O, fixe dans un référentiel galiléen. M se déplace sur une trajectoire circulaire dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante $\omega$. La direction du fil fait un angle $\alpha$ avec la verticale.




1. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ dans la base cylindrique. En déduire une expression de $\dfrac{d\vec{L}_O(M)}{dt}$.
2. En appliquant le TMC, exprimer $\alpha$ en fonction de $\omega$, $\ell$ et $g$.

## ⋆⋆ Exercice 5 : Pendule à ressort



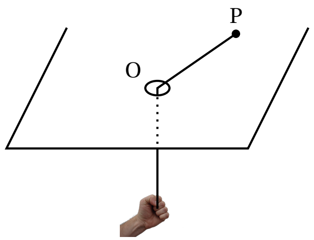

Un point matériel M de masse $m$ peut glisser sans frottement sur un rail circulaire de rayon $a$ situé dans un plan vertical. Il est lié à un ressort élastique de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$, attaché au point fixe A, situé à une distance $a$ au-dessus du centre O du rail.

Dans tout l'exercice, on suppose que $\ell_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ et on pose $\frac{g}{a} = \frac{k}{2m} = \omega^2$.

1. Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $(Oz)$ et montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :
$$\ddot{\theta} + \omega^2\left(\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\right) = 0$$
2. Déterminer les positions d'équilibre sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_{eq}$. Déterminer une forme approchée de l'équation du mouvement autour de chacune des positions d'équilibre. S'agit-il de positions stables ? Si oui, donner l'expression de la pulsation propre des petites oscillations.

   *Indication* : On donne le développement suivant à l'ordre 1 (pour $\varepsilon \ll 1$) :
$$\sin(\theta_{eq} + \varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq}$$

## ★★ Exercice 6 : Mouvement d'une masse attachée à un fil




Un point matériel P de masse $m$ se déplace sans frottement sur un plan horizontal percé d'un trou en O. P est attaché à un fil sans masse inextensible. Un opérateur tire le fil de manière à ce que $\text{OP}(t) = \ell(t) = a - bt$ où $a$ et $b$ sont deux constantes positives. On lance la masse depuis $\theta_0 = 0$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0 = \omega_0$.

1. En appliquant le TMC, trouver l'expression de $\dot{\theta}(t)$.
2. Donner l'expression de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur P en fonction de $\ell(t)$.
3. Calculer le travail fourni au système entre $t = 0$ et une date $t$ quelconque.

## Solutions :

**Ex1** : 3. $F_{\text{min}} = \frac{a}{2b} mg$ ; le diable amplifie la force d'un facteur $\frac{2b}{a} = 6$.

**Ex2** : Le grand-frère se trouve à $0,75\,\text{m}$ de l'axe de rotation.

**Ex3** : 1. $\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0$ 2. $v = \sqrt{2gr\,(\sin\theta - \sin\theta_0)}$ $v_{\text{B}} = \sqrt{2gr\,(1 - \sin\theta_0)}$ AN: $v_{\text{B}} = 6,4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

**Ex4** : 1. $\vec{L}_{\text{O}}(\text{M}) = m\ell^2\omega\sin\alpha\,(\sin\alpha\,\vec{u}_z + \cos\alpha\,\vec{u}_r)$ $\frac{\text{d}\vec{L}_{\text{O}}(\text{M})}{\text{d}t} = m\ell^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}_\theta$

2. $\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$

**Ex5** : 2. $\theta_{\text{eq1}} = 0$ $\theta_{\text{eq2}} = \frac{\pi}{3}$ 3. $\theta_{\text{eq1}} : \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\,\omega$ $\theta_{\text{eq2}} : \omega_0 = \frac{\omega}{2}$

**Ex6** : 1. $\dot{\theta} = \frac{a^2\omega_0}{\ell^2(t)}$ 2. $\vec{T} = -\frac{ma^4\omega_0^2}{\ell^3(t)}\vec{u}_r$ 3. $W = \frac{ma^4\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{a^2}\right)$