TD19 : Forces centrales

⋆ Exercice 1 : Terre et comète de Haley

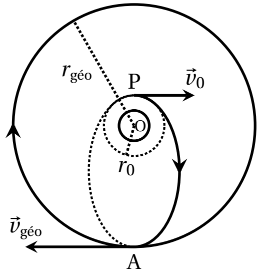
La trajectoire de la Terre autour du soleil est une ellipse faiblement aplatie. Le périhélie P est à la distance $r_P = 0,983$ ua du centre du soleil, où l'unité astronomique 1 ua $= 1,496 \cdot 10^8$ km. La période de révolution (année sidérale) vaut environ 365,25 jours solaires.

1. Calculer le demi grand-axe a de l'orbite terrestre.
   Calculer la position de l'aphélie A ainsi que la vitesse orbitalaire de la Terre en P et A dans le référentiel héliocentrique.
   Calculer également l'excentricité e de la trajectoire de la Terre, définie par $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$.
   Conclure quant à la nature de la trajectoire de la Terre autour du soleil.

   Rq : Voir le poly sur les coniques pour la signification géométrique de l'excentricité.
2. La comète de Haley possède une trajectoire beaucoup plus elliptique que celle de la Terre. Elle passe au voisinage du soleil environ tous les 76 ans et son périhélie est situé à une distance $r_P = 0,59$ ua du soleil.
   Calculer la position de son aphélie, les vitesses v_P et v_A ainsi que l'excentricité de sa trajectoire.

Données : masse du soleil : $M_s = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, constante gravitationnelle : $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ SI

⋆ Exercice 2 : Orbite de transfert



Un satellite artificiel de la Terre (de centre O, de masse M) de masse m se trouve sur une orbite circulaire de rayon $r_0 =$ 6700 km (altitude de 300 km).

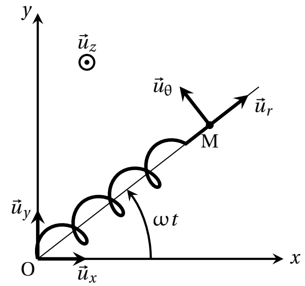
1. Calculer la vitesse v_0 de ce satellite dans le référentiel géocentrique.
2. Calculer le rayon $r_{géo}$ d'une orbite géostationnaire ainsi que la vitesse $v_{géo}$ d'un satellite sur cette orbite.

On souhaite faire passer ce satellite de son orbite initiale à l'orbite géostationnaire. Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_0 et l'apogée A à la distance $r_{géo}$ du centre de la Terre. Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage des moteurs du satellite en modifiant sa vitesse (instantanément). Au point P, la vitesse du satellite passe de v_0 à v_P. Au point A, la vitesse du satellite passe de v_A à $v_{géo}$.

3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites.
4. Calculer la vitesse v_P et en déduire la variation de vitesse en P : $\Delta v_P = v_P - v_0$.
5. Calculer la vitesse v_A et en déduire la variation de vitesse en A : $\Delta v_A = v_{géo} - v_A$.
6. Calculer la durée T du voyage du satellite sur l'orbite de transfert.

Données: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI , $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg

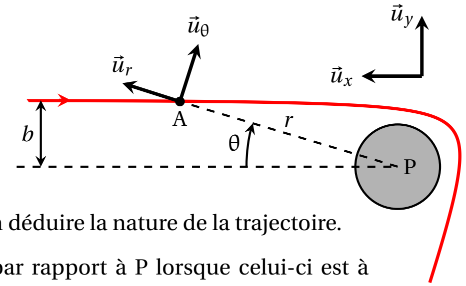
⋆ Exercice 3 : Ressort en rotation



Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan horizontal. Le palet est fixé à un ressort (k, ℓ_0) dont l'autre extrémité est fixé en O. On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM}(t=0) = \ell_1 \vec{u}_x$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \ell_1 \omega \vec{u}_y$ orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Par la suite on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (Oxy).

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ se conserve.
2. On cherche à étudier le mouvement d'un point de vue énergétique.
   a) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$.
   Préciser l'expression de $E_{p,eff}(r)$ et tracer son allure.
   b) La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du centre d'attraction ? La vitesse de la masse peut-elle s'annuler au cours du mouvement ? La masse peut-elle passer par le centre d'attraction au cours du mouvement ?
3. Déterminer une relation entre ℓ_1, k, ℓ_0 et ω pour que le mouvement soit circulaire. Cette condition est-elle valable pour tout ω ?

⋆⋆ Exercice 4 : Deep impact



Un astéroïde A de masse m arrive de l'infini avec une vitesse v_0 (paramètre d'impact b) par rapport à la Terre de masse M, de centre P et de rayon R.

1. Exprimer l'énergie mécanique E de l'astéroïde et en déduire la nature de la trajectoire.
2. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_P$ de l'astéroïde par rapport à P lorsque celui-ci est à l'infini puis lorsqu'il est à une distance minimale r_{min} de P (à la vitesse v). En déduire une expression de v en fonction de b, v_0 et r_{min}.
3. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que r_{min} est solution d'une équation du second degré. Déterminer r_{min} en fonction de b et $a = \frac{GM}{v_0^2}$.
4. À quelle condition l'astéroïde entre-t-il en contact avec la Terre ? A.N. : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I., $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $v_0 = 2,0$ km$\cdot$s^{-1}, $b = 1,4 \cdot 10^5$ km. Calculer r_{min} et conclure.

⋆⋆ Exercice 5 : Densité de Jupiter

La période de révolution de Ganymède, situé à une distance du centre de Jupiter égale à 15 fois le rayon de Jupiter, est 7j 3h 40mn; la période de révolution de la Lune, située à une distance égale à 60 fois le rayon de la Terre, est 27j 7h 40mn.
En déduire la densité de Jupiter sachant que celle de la Terre est 5,52. On supposera que Ganymède et la Lune ont des trajectoires circulaires autour de leur planète respective.

⋆⋆ Exercice 6 : Erreur de Satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse m, sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance r_0 du centre de la Terre, et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale (selon $\vec{u}_\theta$) avec une valeur très précise (voir exercice 2).

1. Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Exprimer alors la vitesse v à donner pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.
2. En déduire dans ce cas l'expression de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.
3. Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur $\vec{v}'$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\vec{u}_\theta$.

a) Quelles sont alors les expressions de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?

b) Déterminer le grand-axe a de l'ellipse réellement décrite par le satellite.

c) On cherche à calculer les distances r_A et r_P entre le satellite et le centre de la Terre lorsqu'il se trouve respectivement à l'apogée et au périgée. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que r_A et r_P sont les deux racines d'un trinôme. Exprimer r_A et r_P en fonction de r_0 et de α.

⋆⋆ Exercice 7 : Libération d'un vaisseau spatial

Un vaisseau spatial de masse m se trouve en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'une planète de masse M. Il possède une vitesse v_0. Il cherche à s'échapper de l'attraction de cette planète. Pour cela on suppose que le vaisseau a une réserve de carburant qui lui permet de modifier instantanément sa vitesse de $\Delta v = 4v_0$. On souhaite comparer les deux stratégies suivantes :

a) Le vaisseau utilise toute ses réserves de carburant pour quitter l'orbite circulaire.

b) Le vaisseau commence par ralentir instantanément jusqu'à une vitesse $v_0/2$, puis il utilise tout son carburant à l'instant où il passe par le périgée de sa nouvelle trajectoire.

1. Exprimer l'énergie mécanique finale E_f du satellite dans le cas a) en fonction de m et v_0. Justifier que ce dernier quitte le champ d'attraction de la planète.
2. Justifier que le satellite, après avoir ralenti instantanément à la vitesse $v_0/2$, se trouve à l'apogée d'une nouvelle trajectoire elliptique. Exprimer le demi grand-axe a de cette trajectoire en fonction de r_0.
3. On note respectivement A et P l'apogée et le périgée du satellite sur sa trajectoire elliptique, r_A et r_P leur distance par rapport au centre de la planète et v_A et v_P la vitesse du satellite en ces points. Montrer que $r_A v_A = r_P v_P$.
4. Exprimer r_P et v_P en fonction de r_0 et v_0.
5. Exprimer E_f dans le cas b) en fonction de m et v_0. Comparer les deux stratégies et conclure.

⋆⋆ Exercice 8 : Trajectoire dans un champ gravitationnel

Un satellite de masse m est en orbite autour de la Terre, de masse $M \gg m$ et de centre O.

1. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ du satellite par rapport à O est une constante du mouvement.
2. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ tel que $\vec{L} = L\vec{u}_z$. Montrer que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m.
3. Montrer que le vecteur $\vec{e} = \frac{L}{GMm}\vec{V} - \vec{u}_\theta$ est une constante du mouvement ($\vec{V}$ étant la vitesse du satellite).
4. On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$. Placer $(\vec{e}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \overrightarrow{OS})$ sur un schéma dans le plan du mouvement. Calculer $\vec{e}.\vec{u}_\theta$ et en déduire que l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires, peut s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{où } e = \|\vec{e}\| \text{ et } p \text{ est à expliciter.}$$

5. Pour quelle valeur de e la trajectoire est-elle circulaire ? Retrouver dans ce cas l'expression de la vitesse du satellite en fonction du rayon R de la trajectoire.

⋆⋆ Exercice 9 : Le petit prince

Évaluer le rayon d'une planète telle qu'en sautant à pieds joints, on puisse échapper à sa pesanteur. On supposera que la planète a une densité identique à celle de la Terre et on pourra admettre, pour simplifier, que le champ de pesanteur à la surface de la Terre vaut $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$, où M_T est la masse de la Terre et R_T son rayon.

Solutions :

Ex1 : 1. $r_A = 1{,}017\,\text{ua}$, $v_P = 30{,}3\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_A = 29{,}3\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, $e = 0{,}017$
2. $r_A = 35{,}3\,\text{ua}$, $v_P = 54{,}4\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_A = 0{,}84\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, $e = 0{,}97$

Ex2 : 1. $v_0 = 7{,}7\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 2. $r_{géo} = 4{,}2\cdot 10^4\,\text{km}$ $v_{géo} = 3{,}1\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$
4. $v_P = 10{,}2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 5. $v_A = 1{,}6\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ 6. $T = 5\text{h}15'$

Ex3 : 2.(a) $E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$ 3. $\ell_1 = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$ il faut $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ex4 : 1. $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ 2. $\vec{L}_P = mbv_0\vec{u}_z = mr_{min}v\vec{u}_z$ 3. $r_{min} = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$ 4. $r_{min} = 7{,}2\cdot 10^4\,\text{km}$

Ex5 : $d = 1{,}3$

Ex6 : 2. $C = \sqrt{GMr_0}$ 3.a) E_m est inchangée, $C = \cos\alpha\sqrt{GMr_0}$ b) $a = r_0$ c) $r_A = r_0(1 + \sin\alpha)$ et $r_P = r_0(1 - \sin\alpha)$

Ex7 : 1. $E_f = \frac{23}{2}mv_0^2$ 2. $a = \frac{4r_0}{7}$ 4. $r_P = \frac{r_0}{7}$, $v_P = \frac{7v_0}{2}$ 5. $E_f = \frac{169}{8}mv_0^2$

Ex8 : 4. $p = \frac{C^2}{GM}$ 5. $e = 0$, $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Ex9 : $R \approx 2\,\text{km}$