Correction du DNS 19

EXERCICE 1

1) a) Soient $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et $\alpha, \beta \in K$. Alors

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha MA + \beta NA = (\alpha M + \beta N)A$$

donc $\alpha M + \beta N \in \mathcal{C}(A)$.

b) Soient $M, N \in \mathcal{C}(A)$. Alors

$$AMN = MAN = MNA$$

donc $MN \in \mathcal{C}(A)$.

c) Supposons A inversible. Alors :

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow A^{-1}AMA^{-1} = A^{-1}MAA^{-1} \Leftrightarrow MA^{-1} = A^{-1}M \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(A^{-1}),$$

donc $\mathcal{C}(A^{-1}) = \mathcal{C}(A)$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Alors :

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a+b \\ a+c = c+d \\ b+d = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Le commutant de A est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in K$.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$. Alors :

$$BM = MB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g = c \\ h = b \\ i = a \\ d = f \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Le commutant de B est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, e \in K$.

3) a) On trouve que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) On trouve $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) On a $A = PDP^{-1}$ donc :

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N \in \mathcal{C}(D).$$

d) Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$. Alors :

$$DN = ND \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ 0 & e & -f \\ 0 & h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = -f \\ g = 0 \\ h = -h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales.

D'après la question précédente, les matrices qui commutent avec A sont donc les matrices de la forme $P^{-1}NP$ où N est de la forme ci-dessus, i.e. de la forme

$$\begin{pmatrix} -4a+6e-i & -2a+3e-i & 4a-5e+i \\ -2a+2i & -a+2i & 2a-2i \\ -6a+6e & -3a+3e & 6a-5e \end{pmatrix}$$

où $a, e, i \in K$.

EXERCICE 2

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = 0$, donc A est nilpotente d'indice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$, donc A est nilpotente d'indice 3.

2) Soit A une matrice nilpotente d'indice p. On a donc $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Si A était inversible, alors on aurait $A^{p-1} = A^p A^{-1} = 0$: contradiction. Donc A n'est pas inversible.

Autre méthode : si A est inversible, alors A^p aussi et $(A^p)^{-1} = A^{-p}$, donc $A^p A^{-p} = I$ d'où $0 = I$: contradiction.

3) Soient p et q les indices de nilpotence respectifs de A et B.

a) Soit $n = \min(p, q)$. Alors, puisque A et B commutent, on a $(AB)^n = A^n B^n = 0$ (car $n = p$ ou $n = q$), donc AB est nilpotente et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

b) Soit $n = p + q - 1$. Alors, puisque A et B commutent, on a :

$$\begin{aligned} (A+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on a $k \geqslant p$ donc $A^k = 0$. Dans la première somme on a $k \leqslant p-1$ donc $n-k \geqslant n-p+1 = q$ et donc $B^{n-k} = 0$. Par conséquent $(A+B)^n = 0$, donc $A+B$ est nilpotente et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

c) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = B^2 = 0$, donc A et B sont nilpotentes, mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne le sont pas (on a $(AB)^n = AB$ pour tout $n > 0$ et $(A+B)^n = A+B$ si n est impair et I si n est pair).

4) a) On sait que quand on multiplie deux matrices triangulaires supérieures, on obtient une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices de départ. Par conséquent, si l'un des coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire supérieure T est non nul, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient correspondant de T^n est également non nul et donc $T^n \neq 0$. Par contraposée, on en déduit que si T est nilpotente, alors tous ses coefficients diagonaux sont nuls.

b) Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $t_{i,j}^{(p)} = 0$ lorsque $j \leqslant i + p - 1$.

Pour $p = 1$, on a $t_{i,j}^{(p)} = t_{i,j} = 0$ lorsque $j \leqslant i$ puisque T est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont nuls.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $t_{i,j}^{(p)} = 0$ lorsque $j \leqslant i + p - 1$. Les coefficients de $T^{p+1} = T^p T$ vérifient l'égalité :

$$t_{i,j}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k}^{(p)} t_{k,j}.$$

Supposons que $j \leqslant i + p$. Si $k \leqslant j - 1$, alors $k \leqslant i + p - 1$ donc $t_{i,k}^{(p)} = 0$ par hypothèse de récurrence. Si $k \geqslant j$, alors $t_{k,j} = 0$. Tous les termes de la somme sont donc nuls, et donc $t_{i,j}^{(p+1)} = 0$.

Par le théorème de récurrence, on a bien $t_{i,j}^{(p)} = 0$ lorsque $j \leqslant i + p - 1$, et ce pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour $p = n$, la propriété précédente devient $t_{i,j}^{(n)} = 0$ lorsque $j \leqslant i + n - 1$. Mais cette dernière inégalité est toujours vraie puisque $i + n - 1 \geqslant n$. Ainsi la matrice T^n est nulle, et donc T est nilpotente (d'indice inférieur ou égal à n).