Devoir n°22 (non surveillé)

À tout entier naturel non nul n on associe la fonction f_n définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin} x).$$

Partie 1

1) Étudier la parité de f_n. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2) Résoudre dans $[0, 1]$ l'équation $f_n(x) = 0$. On montrera qu'elle a exactement $n + 1$ solutions distinctes.

3) a) Démontrer que f_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in\,]-1, 1[$.

b) Calculer la limite de $f_n'(x)$ lorsque x tend vers 1. Que peut-on en déduire ?

4) Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 3 au voisinage de 0.

5) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. On pourra faire un changement de variable puis utiliser une formule de trigonométrie.

6) a) Étudier les variations de f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 4 cm). On précisera une équation de la tangente T à C_1 au point d'abscisse 0 et la position de C_1 par rapport à T au voisinage de ce point.

b) Calculer l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f_1(x)$.

Partie 2

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \left(1 - X^2\right)^{n-k-1} X^{2k}.$$

1) a) À l'aide de la formule de Moivre, établir, pour tout réel θ, l'égalité :

$$\sin(2n\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \cos^{2n\,-\,2k\,-\,1}\theta \sin^{2k\,+\,1}\theta.$$

b) En déduire que, pour tout réel θ, on a :

$$\sin(2n\theta) = \sin\theta . \cos\theta . P_n(\sin\theta).$$

2) a) Déduire de la relation précédente que, pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$:

$$f_n(x) = x\sqrt{1 - x^2}P_n(x).$$

b) Expliciter P_1, P_2 et P_3.

3) Développer $(1 + 1)^{2n}$ et $(1 - 1)^{2n}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

4) a) Montrer que le polynôme P_n n'a que des termes de degré pair.

b) Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

c) Calculer $P_n(0)$.

d) Calculer $P_n(1)$.

5) a) Résoudre l'équation $P_n(x) = 0$ dans $[0, 1]$, puis dans $[-1, 1]$, et enfin dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.