TD20 : Forces centrales - corrigé

⋆ Exercice 1 : Terre et comète de Haley

1. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \iff \boxed{a = \left(\frac{GM_s T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}000\,\text{ua}}$$

La position de l'aphélie vérifie : $r_p + r_A = 2a \iff \boxed{r_A = 2a - r_p = 1{,}017\,\text{ua}}$.

L'énergie mécanique de la Terre, dans le référentiel héliocentrique, vaut (on néglige la rotation de la Terre sur elle-même) : $E = -\frac{GM_sM_T}{2a}$. Cette énergie se conserve au cours du mouvement.

À l'aphélie, $E = \frac{1}{2}M_T v_A^2 - \frac{GM_sM_T}{r_A} = -\frac{GM_sM_T}{2a} \iff \boxed{v_A = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} = 29{,}3\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Au périhélie, $E = \frac{1}{2}M_T v_p^2 - \frac{GM_sM_T}{r_p} = -\frac{GM_sM_T}{2a} \iff \boxed{v_p = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a}\right)} = 30{,}3\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

L'excentricité de l'ellipse vaut $\boxed{e = 0{,}017}$. L'excentricité est proche de 0 ce qui signifie que la trajectoire de la Terre autour du soleil est $\boxed{\text{quasi-circulaire}}$.

2. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_H^2}{a_H^3} \iff \boxed{a_H = \left(\frac{T_H}{T}\right)^{\frac{2}{3}} a = 17{,}9\,\text{ua}}$$

La position de l'aphélie vérifie : $r_p + r_A = 2a \iff \boxed{r_A = 2a - r_p = 35{,}3\,\text{ua}}$.

À l'aphélie, $\boxed{v_A = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} = 0{,}84\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Au périhélie, $\boxed{v_p = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a}\right)} = 54{,}4\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

L'excentricité de l'ellipse vaut $\boxed{e = 0{,}97}$. La trajectoire de la comète de Haley est une ellipse très allongée.

⋆ Exercice 2 : Orbite de transfert

1. (voir cours) $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = 7{,}7\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. (voir cours) $\boxed{r_{\text{géo}} = \left(\frac{GMT_{\text{sid}}^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42\cdot 10^3\,\text{km}}$ et $\boxed{v_{\text{géo}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\text{géo}}}} = 3{,}1\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. Sur les deux orbites circulaires, l'énergie mécanique vaut :

$$\boxed{E_0 = -\frac{GmM}{2r_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{\text{géo}} = -\frac{GmM}{2r_{\text{géo}}}}$$

L'orbite de transfert est telle que son grand-axe vaut $2a = r_0 + r_{\text{géo}}$. Par conséquent, l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert vaut :

$$\boxed{E_t = -\frac{GmM}{2a} = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}}}$$

4. La vitesse v_P est la vitesse au point P du satellite lorsqu'il est engagé sur **l'orbite de transfert**. On peut donc écrire :

$$E_t = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GmM}{r_0} \iff \boxed{v_P = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + r_{\text{géo}}}\right)} = 10{,}2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

et la variation de vitesse vaut $\boxed{\Delta v_P = 2{,}5\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

5. La vitesse v_A est la vitesse au point A du satellite lorsqu'il est engagé sur **l'orbite de transfert**. On peut donc écrire :

$$E_t = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_{\text{géo}}} \iff \boxed{v_A = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_{\text{géo}}} - \frac{1}{r_0 + r_{\text{géo}}}\right)} = 1{,}6\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

et la variation de vitesse vaut $\boxed{\Delta v_A = 1{,}5\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

6. Le voyage sur l'orbite de transfert dure exactement une demi-période. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{\left(\frac{r_0 + r_{\text{géo}}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \iff \boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0 + r_{\text{géo}})^3}{8GM}} = 5\text{h}14\text{mn}}$$

⋆ Exercice 3 : Ressort en rotation

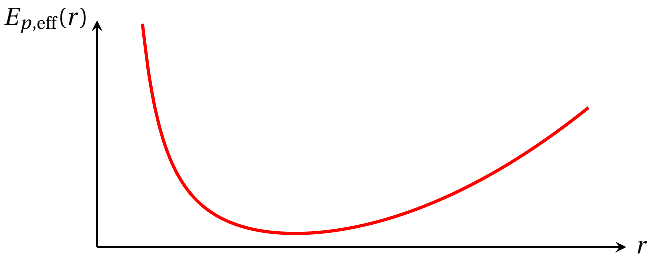
1. La force exercée par le ressort élastique est centrale (elle est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$) donc son moment par rapport à O est nul.
D'autre part, le palet est soumis à son poids et à la réaction normale du support. Ces deux forces (colinéaires à $\overrightarrow{u_z}$) sont opposées puisque le mouvement reste horizontal. Les moments de ces deux forces se compensent également ($\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P}\right)+\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{N}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\left(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{N}\right)=\overrightarrow{0}$).
D'après le TMC appliqué à M, par rapport à O, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F}\right)}_{=\overrightarrow{0}}+\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P}\right)+\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{N}\right)}_{=\overrightarrow{0}}=\overrightarrow{0}\iff\boxed{\overrightarrow{L_O}=\overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}}$$

2.a) Voir cours pour la démo :

$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r)=\frac{mC^2}{2r^2}+E_p(r)=\frac{mC^2}{2r^2}+\frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2}$$

où $C=\frac{\left\|\overrightarrow{L_O}\right\|}{m}=r^2\dot{\theta}$ est la constante des aires. On trace ci-dessous l'allure de cette fonction :



2.b) L'énergie potentielle effective a l'allure d'un **puits de potentiel infini**. Quelque soit l'énergie de la masse, celle-ci ne pourra **ni s'éloigner à l'infini, ni atteindre le centre de force**.
D'après la loi des aires :

$$C=\mathrm{C^{te}}=\ell_1^2\omega=rv\iff v=\frac{\ell_1^2\omega}{r}$$

On a montré que la masse ne peut pas s'éloigner à l'infini donc **la vitesse de la masse ne s'annule jamais**.

3. Si un mouvement circulaire est possible, il sera de rayon ℓ_1 et de vitesse angulaire $\dot{\theta}=\omega$. D'après le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre, projeté sur $\overrightarrow{u_r}$:

$$-m\ell_1\omega^2=-k(\ell_1-\ell_0)\iff\boxed{\ell_1\left(k-m\omega^2\right)=k\ell_0}$$

$k\ell_0$ est toujours positif, par conséquent cette relation n'est possible qu'à la condition que :

$$k-m\omega^2>0\iff\boxed{\omega<\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

⋆⋆ Exercice 4 : Deep impact

1. Lorsque l'astéroïde est à l'infini, son énergie potentielle est nulle donc $\boxed{E=\frac{1}{2}mv_0^2>0}$. L'astéroïde est dans un état diffus et sa trajectoire est $\boxed{\text{hyperbolique}}$.

2. Le moment cinétique de l'astéroïde vaut :

$$\overrightarrow{L_P}=mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}=mrv_\theta\overrightarrow{u_z}$$

Lorsque le satellite s'éloigne à très grande distance, on a en première approximation $\overrightarrow{v}=v_0\overrightarrow{u_x}$ donc $v_\theta=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u_\theta}=v_0\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{u_\theta}=v_0\sin\theta$. On a également $r\sin\theta=b$ donc, à l'infini : $\boxed{\overrightarrow{L_P}=mbv_0\overrightarrow{u_z}}$.
Lorsque l'astéroïde est à la distance minimale d'approche, la vitesse est orthoradiale ($v_\theta=v$) donc : $\boxed{\overrightarrow{L_P}=mr_{\min}v\overrightarrow{u_z}}$. Par conservation du moment cinétique :

$$\boxed{bv_0=r_{\min}v}$$

3. Il y a également conservation de l'énergie mécanique :

$$E=\tfrac{1}{2}mv_0^2=\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mC^2}{2r^2}-\frac{GmM}{r}$$

Quand on se place au point le plus proche de la trajectoire, $r=r_{\min}$ et $\dot{r}=0$. De plus, la constante des aires vaut $C=bv_0$. Cette équation devient :

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2=\frac{mb^2v_0^2}{2r_{\min}^2}-\frac{GmM}{r_{\min}}$$

En multipliant tous les termes par $\frac{2r_{\min}^2}{mv_0^2}$, on aboutit à l'équation du second degré ci-dessous :

$$r_{\min}^2+\frac{2GM}{v_0^2}r_{\min}-b^2=0\iff\boxed{r_{\min}^2+2ar_{\min}-b^2=0}$$

Le discriminant vaut $\Delta=4a^2+4b^2$. La seule solution positive est : $\boxed{r_{\min}=-a+\sqrt{a^2+b^2}}$.

4. L'astéroïde rentre en contact avec la Terre si $r_{\min}<R$. L'AN donne $\boxed{r_{\min}=72\cdot10^3\,\text{km}}$. Sachant que le rayon terrestre vaut $R=6,4\cdot10^3\,\text{km}$, le choc n'aura pas lieu. OUF!

⋆⋆ Exercice 5 : Densité de Jupiter

On applique la troisième loi de Kepler à Ganymède, en notant R_J le rayon de Jupiter, M_J sa masse , ρ_J sa densité et T_J sa période de révolution :

$$\frac{T_J^2}{(15R_J)^3}=\frac{4\pi^2}{GM_J}=\frac{4\pi^2}{G\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R_J^3\rho_J\right)}\iff\rho_J=\frac{3\pi\times(15)^3}{GT_J^2}$$

On répète la même opération pour la Lune :

$$\frac{T_T^2}{(60R_T)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{G\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R_T^3\rho_T\right)} \iff \rho_T = \frac{3\pi\times(60)^3}{GT_T^2}$$

On en déduit une relation entre la densité de Jupiter d_J et celle de la Terre d_T :

$$\frac{d_J}{d_T} = \frac{\rho_J}{\rho_T} = \left(\frac{T_T}{T_J}\right)^2 \times \left(\frac{15}{60}\right)^3 \iff \boxed{d_J = \frac{1}{4^3}\left(\frac{T_T}{T_J}\right)^2 d_T = 1{,}26}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Erreur de Satellisation

1. On applique le théorème de la puissance cinétique au satellite, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \overrightarrow{F_{\text{grav}}}\cdot\vec{v} = -\frac{GmM_T}{R^2}\overrightarrow{u_r}\cdot v\overrightarrow{u_\theta} = 0$$

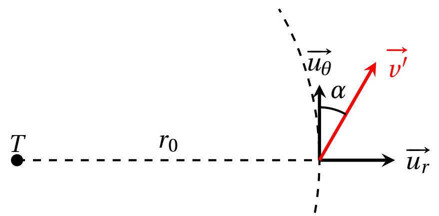
Si le mouvement est circulaire alors la force gravitationnelle ne travaille pas, donc l'énergie cinétique se conserve. Le mouvement est uniforme.

Voir cours pour le calcul de la vitesse : $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$.

2. L'énergie mécanique et la constante des aires valent alors :

$$\boxed{E = -\frac{GmM_T}{2r_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = r_0^2\dot\theta = r_0 v = \sqrt{GM_T r_0}}$$

3.a)



$\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ont même norme donc l'énergie cinétique est la même dans les deux cas. L'énergie potentielle aussi puisque le satellite est lancé depuis l'orbite de rayon r_0. Par conséquent, l'énergie mécanique est inchangée. En revanche, la constante des aires est modifiée car désormais $v_\theta = \left\|\overrightarrow{v'}\right\|\cos\alpha = v\cos\alpha$.

$$\boxed{E = -\frac{GmM_T}{2r_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = r_0 v_\theta = r_0 v\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{GM_T r_0}}$$

3.b) Le satellite est dans un état lié puisque $E < 0$, mais sa trajectoire n'est pas circulaire puisque $\overrightarrow{v'}$ n'est pas orthoradiale. La trajectoire ne peut donc qu'être **elliptique**. Le demi grand-axe de l'orbite est tel que :

$$E = -\frac{GmM_T}{2a} = -\frac{GmM_T}{2r_0} \iff \boxed{a = r_0}$$

3.c) On exprime l'énergie mécanique en un point quelconque de la trajectoire :

$$E = -\frac{GmM_T}{2r_0} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

À l'apogée et au périgée, $\dot r = 0$. D'autre part, $C = \cos\alpha\sqrt{GM_T r_0}$, ce qui donne :

$$-\frac{GmM_T}{2r_0} = +\frac{GmM_T r_0}{2r^2}\cos^2\alpha - \frac{GmM_T}{r}$$

En multipliant tous les termes par $\frac{2r_0}{GmM_T}r^2$, on aboutit à l'équation du second degré ci-dessous :

$$\boxed{r^2 - 2r_0 r + r_0^2\cos^2\alpha = 0}$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4r_0^2 - 4r_0^2\cos^2\alpha = 4r_0^2\left(1-\cos^2\alpha\right) = 4r_0^2\sin^2\alpha$. Les deux racines du trinôme conduisent aux expressions de r_a et r_p :

$$\boxed{r_p = r_0(1-\sin\alpha)} \quad \text{et} \quad \boxed{r_a = r_0(1+\sin\alpha)}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Libération d'un vaisseau spatial

1. Sur son orbire circulaire initiale de rayon r_0, la vitesse du satellite vaut $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$. Après utilisation de son carburant, la vitesse du satellite vaut $v_f = 5v_0$ et son énergie mécanique :

$$\boxed{E_f = \frac{1}{2}m(5v_0)^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{25}{2}mv_0^2 - mv_0^2 = \frac{23}{2}mv_0^2}$$

L'énergie mécanique est **strictement positive** donc le satellite se trouve dans un **état diffus**. Il quitte le champ d'attraction gravitationnel de la planète.

2. Au moment du ralentissement, l'énergie mécanique du satellite vaut :

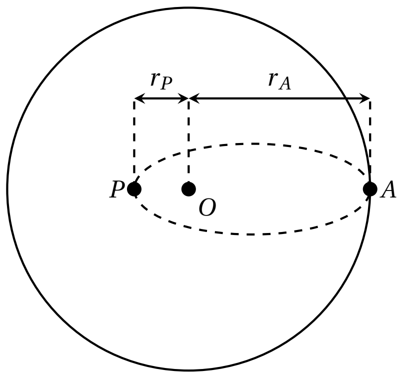
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{GmM}{r_0} = \frac{1}{8}\frac{GmM}{r_0} - \frac{GmM}{r_0} = -\frac{7}{8}\frac{GmM}{r_0}$$

L'énergie mécanique est **strictement négative** donc le satellite se trouve dans un **état lié**. Sa trajectoire ne peut plus être circulaire car la vitesse $\frac{v_0}{2}$ ne lui permet pas de se maintenir sur une orbite circulaire de rayon r_0. Par conséquent, la trajectoire est nécessairement **elliptique**. On va montrer que le point de départ de cette orbite est l'apogée.

Sur sa nouvelle trajectoire elliptique, le demi grand-axe est tel que :

$$E = -\frac{GmM}{2a} = -\frac{7}{8}\frac{GmM}{r_0} \iff \boxed{a = \frac{4r_0}{7} < r_0}$$

Le grand-axe $2a$ de l'ellipse est inférieure au diamètre $2r_0$ de l'orbite intiale. Le schéma ci-dessous illustre la situation et justifie que le point de départ est bien l'apogée de la nouvelle trajectoire.



3. La constante de aires vaut $C = r^2\dot{\theta} = r\,v_\theta$. Au périgée et à l'apogée, la vitesse est orthoradiale, donc :

$$\boxed{C = r_A v_A = r_P v_P}$$

4. D'après l'énoncé, $v_A = \frac{v_0}{2}$. D'après la figure ci-dessus, on reconnait que $r_A = r_0$. On a montré à la question 2 que $a = \frac{4r_0}{7}$. La position du périgée est donnée par :

$$r_P + r_A = 2a \iff \boxed{r_P = \frac{8r_0}{7} - r_0 = \frac{r_0}{7}}$$

On détermine enfin v_P en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\boxed{v_P = \frac{r_A}{r_P}\,v_A = \frac{7}{2}\,v_0}$$

5. Une fois son carburant épuisé, la vitesse du satellite vaut $\frac{7}{2}v_0 + 4v_0 = \frac{15}{2}v_0$. Son énergie mécanique vaut :

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{15}{2}v_0\right)^2 - \frac{GmM}{\frac{r_0}{7}} = \frac{225}{8}mv_0^2 - 7mv_0^2 \iff \boxed{E_f = \frac{169}{8}mv_0^2}$$

Comparons l'énergie mécanique finale dans les cas a) et b) :

$$\frac{E_f^b}{E_f^a} = \frac{\frac{169}{8}}{\frac{23}{2}} = \frac{169}{92} \simeq 1,8$$

La situation b) est favorable en termes énergétiques puisque l'énergie mécanique finale est supérieure. On rappelle qu'une fois à grande distance de la planète, l'énergie cinétique du satellite est égale à E_f puisque $E_p = 0$ à l'infini. En utilisant astucieusement l'attraction gravitationnelle de la planète, on peut libérer le satellite de l'attraction de cette dernière et l'éjecter avec une énergie plus importante.

⋆⋆ Exercice 8 : Trajectoire dans un champ gravitationnel

1. Voir cours.

2. Voir cours. $\boxed{C = \dfrac{L}{m}}$.

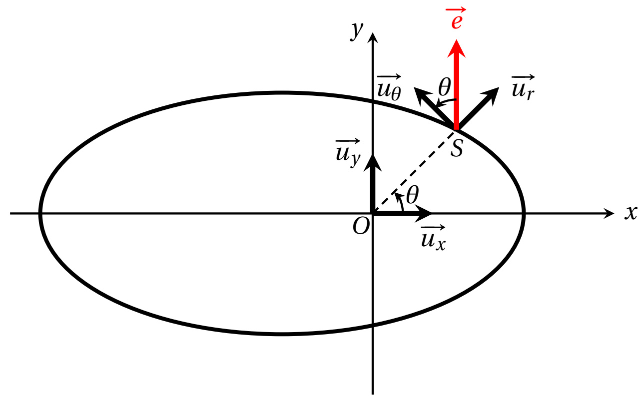
3. On dérive ce vecteur par rapport au temps : $\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{L}{GmM}\frac{d\vec{V}}{dt} + \dot{\theta}\vec{u_r}$.

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen : $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u_r}$. Par ailleurs, $L = mr^2\dot{\theta}$. Par conséquent :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{GmM}\left(-\frac{GM}{r^2}\vec{u_r}\right) + \dot{\theta}\vec{u_r} = -\dot{\theta}\vec{u_r} + \dot{\theta}\vec{u_r} = \vec{0}$$

$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{e} \text{ est une constante du mouvement}}$.

4. On représente graphiquement la situation :



Dans un premier temps, notons que $\vec{e}\cdot\vec{u_\theta} = e\cos\theta$. Ensuite, on peut exprimer ce même produit scalaire en remplaçant $\vec{e}$ par son expression :

$$\vec{e}\cdot\vec{u_\theta} = \left(\frac{L}{GmM}\vec{V} - \vec{u_\theta}\right)\cdot\vec{u_\theta} = \frac{L}{GmM}\cdot r\dot{\theta} - 1$$

En utilisant $L = mC$, $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $\vec{e}\cdot\vec{u_\theta} = e\cos\theta$, on aboutit à la relation :

$$e\cos\theta = \frac{C^2}{GMr} - 1 \iff \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \text{avec } p = \frac{C^2}{GM}}$$

La trajectoire est circulaire si r est indépendant de θ, c'est-à-dire si $\boxed{e = 0}$. Dans ce cas :

$$R = p = \frac{C^2}{GM} = \frac{R^2V^2}{GM} \iff \boxed{V = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

On retrouve le résultat démontré en cours.

⋆⋆ Exercice 9 : Le petit prince

La vitesse de libération d'un corps lancé depuis la surface d'un astre de masse M et de rayon R vaut $v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (voir cours sur la 2° vitesse cosmique pour la démo). Cela correspond à une énergie cinétique $E_{c,\text{lib}} = \frac{GmM}{R}$.

On estime l'énergie cinétique mise en jeu dans un saut à pieds joints. Un tel saut permet en général d'élever son centre de gravité d'environ 50 cm (plus d'un mètre pour le record du monde de saut en hauteur). Cela correspond à une énergie cinétique $E_c = mgh$ où $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ est le champ gravitationnel à la surface de la Terre et $h = 0,5\,\text{m}$.

Appliqué au cas du petit prince, un tel saut permet de quitter le champ d'attraction gravitationnel de la planète à condition que :

$$mgh = \frac{GmM_T}{R_T^2}h > \frac{GmM}{R} \iff \frac{M_T h}{R_T^2} > \frac{M}{R}$$

Comme la planète a une densité identique à celle de la Terre :

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \iff M = M_T\left(\frac{R}{R_T}\right)^3$$

On en déduit que la condition sur le rayon de la planète s'écrit :

$$\frac{M_T h}{R_T^2} > \frac{M_T}{R_T^3}R^2 \iff \boxed{R < \sqrt{R_T h} \simeq 2\,\text{km}}$$