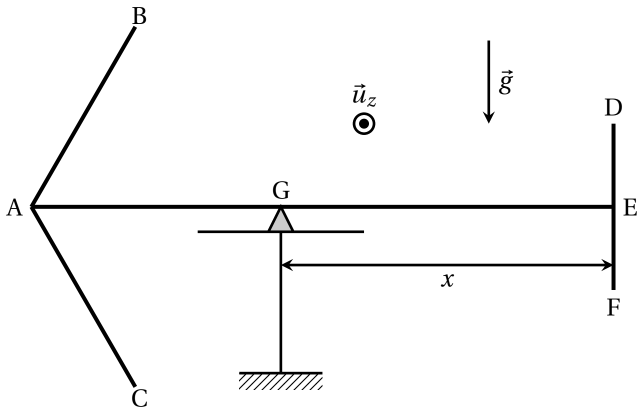
TD20 : Mouvement d'un solide

⋆ Exercice 1 : Centre d'inertie d'une ancre

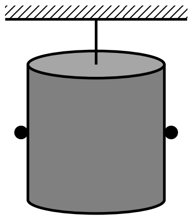


On modélise une ancre par un solide constitué de quatre portions rectilignes : AB, AC, AE et DF. Les portions AB et AC forment chacune un angle de 60° avec la portion AE. On suppose que la masse totale, notée m, est répartie de manière homogène. On pose AB = AC = DF = L et AE = $3L$.

On note G le centre d'inertie de l'ancre et on cherche sa position, caractérisée par la distance GE = x. Pour cela, on pose l'ancre sur l'arrête d'un support triangulaire (ou "couteau") et on cherche à la maintenir en équilibre.

1. Déterminer, en fonction de m, la masse de chaque portion rectiligne.
2. Justifier que G se trouve sur le segment [AE].
3. Justifier que l'ancre demeure en équilibre si celle-ci repose sur le couteau en G.
4. La condition précédente étant vérifiée, exprimer le moment du poids de chaque portion rectiligne par rapport à l'axe (Gz) en fonction de m, g, L et x.
5. Déterminer numériquement le rapport $\frac{x}{L}$.

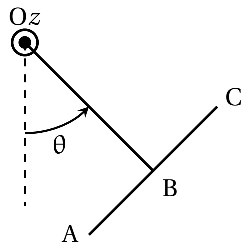
⋆ Exercice 2 : Mesurage du moment d'inertie d'un satellite



On souhaite mesurer le moment d'inertie I_0 d'un satellite artificiel, assimilable à un cylindre de rayon R, par rapport à son axe de symétrie. On fixe le satellite à un fil de torsion vertical, de constante de raideur C inconnue et on le laisse osciller librement. On note T_0 la période des oscillations. On fixe ensuite deux masselottes identiques m diamétralement opposées sur les parois du satellite et on laisse à nouveau osciller le système librement. On note T la nouvelle période des oscillations.

1. Exprimer T_0 et T en fonction de C, I_0, m et R.
2. Montrer que cette expérience permet de mesurer I_0.

⋆ Exercice 3 : Pendule pesant



Un pendule pesant est constitué de deux tiges perpendiculaires homogènes OB et AC de même masse m et même longueur L. Les deux tiges sont rigidement liées en B, centre de la tige AC. L'ensemble peut pivoter autour de l'axe (Oz). La liaison pivot en O est supposée idéale et on néglige tout frottement.

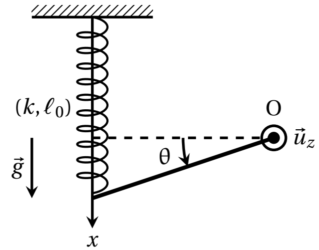
Données :

moment d'inertie de la tige OB par rapport à (Oz) : $I_1 = \frac{1}{3}mL^2$,

moment d'inertie de la tige AC par rapport à (Oz) : $I_2 = \frac{13}{12}mL^2$

1. Exprimer le moment du poids de chacune des tiges par rapport à (Oz) puis établir l'équation du mouvement du pendule.
2. Déterminer la position du centre d'inertie du pendule (on pourra commencer par chercher le centre d'inertie de chacune des tiges). Retrouver l'équation du mouvement en utilisant ce résultat.

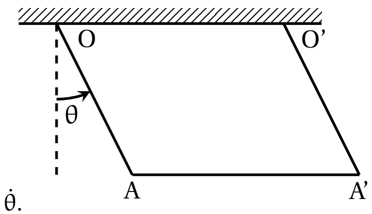
⋆ Exercice 4 : Mouvement d'un système {tige + ressort}



On considère une barre de masse m, de longueur L, solidaire d'un axe (Oz) par une liaison pivot idéale. Son autre extrémité est attachée à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On désigne par θ l'angle entre l'horizontale et la barre. On suppose qu'à l'équilibre, la barre est horizontale ($\theta_{eq} = 0$) et on note ℓ_{eq} la longueur du ressort correspondante. Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Oz) vaut $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Déterminer ℓ_{eq}.
2. Établir l'expression de la période des petites oscillations (on supposera que le mouvement reste quasiment rectiligne suivant la verticale et on linéarisera $\cos\theta \sim 1$ et $\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$).

⋆⋆ Exercice 5 : Une balançoire



Deux barres de longueur L et de masse m sont fixées au plafond en deux points O et O' distants de L. Elle peuvent tourner autour de deux axes horizontaux parallèles. Les deux extrémités libres A et A' sont reliées par une barre identique. Les articulations en A et A' sont parfaites.

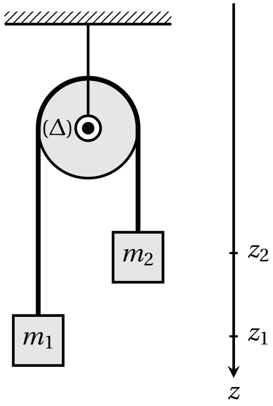
1. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de θ et $\dot{\theta}$.
2. Établir l'équation du mouvement et déterminer la période des petites oscillations du système.

Donnée : Le moment d'inertie d'une barre homogène de longueur L et de masse m par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son extrémité vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$.

TD20 : Mouvement d'un solide

⋆⋆ Exercice 6 : Inertie d'une poulie

Deux masses m_1 et m_2 sont accrochées aux extrémités d'un fil inextensible sans masse passant dans la gorge d'une poulie (assimilée à un cylindre homogène de rayon R et de masse M). La liaison entre la poulie et son axe est supposée idéale et on note $I = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe de rotation (Δ). On repère la position des masses avec un axe (Oz) vertical descendant. On note Ω la vitesse angulaire de la poulie (on prendra l'axe (Δ) comme référence pour l'orientation des angles).



On abandonne, à $t = 0$, les deux masses depuis la position $z_1(0) = z_2(0) = 0$ sans vitesse initiale. On suppose que le contact entre le fil et la poulie s'effectue sans glissement. On admet alors que pour le système {masses + fil + poulie}, la puissance des forces intérieures est nulle.

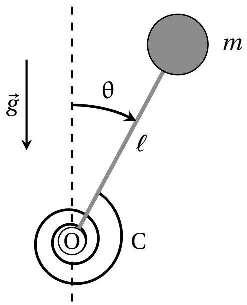
Données : $m_1 = 10\,\text{kg}$; $m_2 = 5\,\text{kg}$; $M = 100\,\text{kg}$; $R = 50\,\text{cm}$; $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Sachant que le fil est inextensible, exprimer $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$ en fonction de Ω (on pourra comparer ces deux vitesses à celle d'un point du fil qui est en contact avec la poulie).
2. Appliquer le théorème de la puissance cinétique au système {masses + fils + poulie} et établir l'équation différentielle vérifiée par $\Omega(t)$. En déduire l'expression de $\Omega(t)$. À quelle date la poulie a-t-elle effectué son premier tour complet ? Quelle est alors sa vitesse angulaire (en tours/min) ?
3. Déterminer littéralement et numériquement la tension T_1 que le fil exerce sur la masse m_1 puis la tension T_2 qu'il exerce sur la masse m_2.
4. Déterminer littéralement et numériquement le moment $\mathcal{M}_{\text{fil}}$ que le fil exerce sur la poulie par rapport à l'axe (Δ).

⋆⋆ Exercice 7 : Pendule de Holweck-Lejay

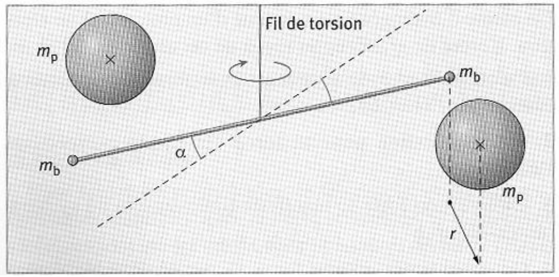
On accroche une masse m au bout d'une barre de masse nulle, de longueur ℓ, avec une liaison parfaite à l'origine O.

Le système est soumis au champ de pesanteur uniforme et au couple $\Gamma = -C\theta$ d'un ressort spirale.



1. Donner qualitativement le comportement du système dans les cas limites C très grand et C très petit (dire devant quoi).
2. Déterminer les positions d'équilibre (montrer de manière graphique qu'on peut distinguer deux cas de figure suivant la valeur de $\frac{C}{mg\ell}$).
3. À quelle(s) condition(s) a-t-on θ = 0 comme position d'équilibre stable ?
4. On suppose cette (ces) condition(s) vérifiée(s) ; montrer que les petits mouvements sont périodiques et donner la période T en fonction de g, ℓ et $\eta = \frac{C}{mg\ell}$.
5. Le champ de pesanteur varie très faiblement de dg. Exprimer la variation relative $\frac{dT}{T}$ due à la variation dg. La comparer au $\frac{dT_0}{T_0}$ du pendule simple. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

⋆⋆ Exercice 8 : Expérience de Cavendish



En 1798, H.Cavendish utilise un pendule de torsion pour mesurer la masse de la Terre et déterminer sa densité. Ses mesures permettent de déterminer la valeur de la constante de gravitation universelle G (qui n'avait pas encore été définie à l'époque).

H.Cavendish accroche tout d'abord une boule de plomb de diamètre 5 cm et de masse $m_b = 730\,\text{g}$ à chacune des deux extrémiés d'une tige en bois de longueur $L = 2{,}0\,\text{m}$ et de masse négligeable. Il suspend ce système à un fil de torsion de constante C. L'expérience se déroule en deux temps :

- dans un premier temps, il fait osciller librement le pendule de torsion et mesure la période des oscillations. Il trouve $T = 7{,}0\,\text{min}$.
- il approche ensuite deux boules de plomb de diamètre 30 cm et de masse $m_p = 158\,\text{kg}$ à une distance $r = 22{,}5\,\text{cm}$. Il mesure un décalage de la position d'équilibre qui correspond à une torsion d'angle $\alpha_{eq} = 0{,}053°$.

Expliquer la démarche de Cavendish et déterminer la valeur numérique de G.

Solutions :

Ex1 : 1. $m_{AB} = m_{AC} = m_{DF} = \frac{m}{6}$; $m_{AE} = \frac{m}{2}$.

2. $\mathcal{M}_z(\vec{P}_{AB}) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AC}) = \left(\frac{11L}{4} - x\right)\frac{mg}{6}$ $\quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_{DF}) = -\frac{mgx}{6}$ $\quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AE}) = -\left(x - \frac{3L}{2}\right)\frac{mg}{2}$

3. $\frac{x}{L} = \frac{5}{3}$

Ex2 : 2. $I_0 = \frac{2mR^2T_0^2}{T^2 - T_0^2}$ $\qquad$ **Ex3** : 1. $\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\sin\theta = 0$

Ex4 : 1. $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}$ $\quad$ 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$ $\qquad$ **Ex5** : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{6g}}$

Ex6 : 1. $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2 = R\Omega$ $\quad$ 2. $\Omega(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\frac{gt}{R}$ $\quad t = 2{,}9\,\text{s}$ $\quad \Omega = 42\,\text{tours/min}$

3. $T_1 = 92\,\text{N}$ $\quad T_2 = 54\,\text{N}$ $\quad$ 4. $\mathcal{M}_{\text{fil}} = 19\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Ex7 : 2. À l'équilibre : $\sin\theta = \frac{C}{mg\ell}\theta$ (une ou deux pos. d'eq. suivant que $\frac{C}{mg\ell} < 1$ ou $\frac{C}{mg\ell} > 1$)

3. $\frac{C}{mg\ell} > 1$ $\quad$ 4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g(\eta-1)}}$ $\quad$ 5. $\frac{dT}{T} = \frac{dg}{2g(\eta-1)}$

Ex8 : $G = \frac{2\pi^2\alpha_{eq}r^2L}{m_pT^2} = 6{,}6.10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$