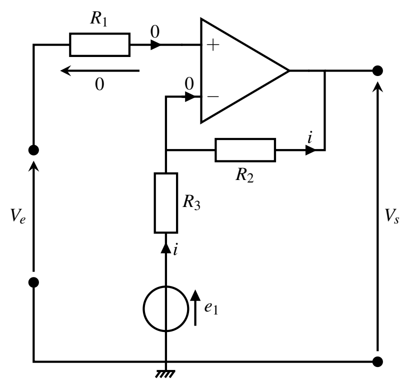
Corrigé DM5 - partie 2

Exercice 1 : **Utilisation d'un matériau piézoélectrique en capteur de force**

1. Modèle de l'ALI idéal :

- **en régime linéaire, la tension différentielle est nulle** : $V_+ = V_-$,
- **les courants d'entrée sont nuls** : $i_- = i_+ = 0$.
- **les impédances d'entrée sont infinies, l'impédance de sortie est nulle**.

On annote le schéma de la figure 1 :



Le potentiel du côté inférieur de la lame est nul car il est relié à la masse donc le potentiel du côté supérieur de la lame vaut V_e. La tension aux bornes de R_1 est nulle car $i_+ = 0$. On en déduit que $V_+ = V_e$. Comme l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire on conclut que $V_+ = V_- = V_e$.

Le potentiel "en-dessous" de R_3 est égal à e_1. On écrit la loi des nœuds en termes de potentiel au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\frac{e_1 - V_e}{R_3} = \frac{V_e - V_s}{R_2} \iff \boxed{V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}}$$

2. L'AN donne $\boxed{V_e = 0{,}95\,\mathrm{V}}$.

3. La force vaut : $\boxed{F = \dfrac{CV_e}{K} = 0{,}76\,\mathrm{N}}$.

4. On commence par calculer la fonction de transfert du montage 2. En associant les impédances en série (à l'entrée) et en dérivation (dans la boucle) on retrouve un schéma classique avec une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{H} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{Z_1} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + R_1 \\ \underline{Z_2} = \dfrac{R_2/\mathrm{j}C_2\omega}{R_2 + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \dfrac{R_2}{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega} \end{cases}$$

Après simplifications on trouve que :

$$\underline{H} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2C_2}{R_1C_1} + \mathrm{j}\left(R_2C_2\omega - \frac{1}{R_1C_1\omega}\right)}$$

Les signaux d'entrée et de sortie sont en opposition de phase à condition que $\arg(\underline{H}) = \pi$, c'est-à-dire que $\underline{H}$ soit un **réel négatif**. On vérifie rapidement que c'est le cas à condition que :

$$R_2C_2\omega - \frac{1}{R_1C_1\omega} = 0 \iff \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\iff \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} = 3{,}2\cdot 10^2\,\mathrm{Hz}}$$

Exercice 2 : **Comète en approche**

1. La Terre est soumise à la force gravitationnelle exercée par le soleil $\vec{F}_{\mathrm{S/T}} = -\frac{GM_SM_T}{a_0^2}\vec{u}_r$. Sa vitesse est orthoradiale si l'on suppose que son mouvement est circulaire. On applique le théorème de la puissance mécanique à la Terre dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{S/T}} \cdot \vec{v} = 0$$

L'énergie cinétique de la Terre se conserve donc son mouvement est uniforme.

2. Voir cours pour le calcul de la vitesse en fonction de a_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{a_0}} \iff \boxed{a_0 = \frac{GM_S}{v_0^2} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}$$

3. La force gravitationnelle exercée par le soleil sur la comète est conservative donc l'énergie mécanique de la comète se conserve. On l'exprime à l'instant initial :

$$E = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{GmM_S}{a_0/2} = \frac{2GmM_S}{a_0} - \frac{2GmM_S}{a_0} \iff \boxed{E = 0}$$

La trajectoire de la comète est **parabolique**. Elle est dans un état **diffus** car elle ne reste pas au voisinage du soleil mais finit par s'en éloigner à l'infini.

4. On applique le théorème du moment cinétique à la comète, par rapport au soleil, dans le référentiel héliocentrique.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{S}}(\mathrm{C})}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{SC}} \wedge \vec{F}_{\mathrm{S/C}} = \vec{0} \ \text{ car } \ \overrightarrow{\mathrm{SC}} \parallel \vec{F}_{\mathrm{S/C}}$$

Le moment cinétique de la comète se conserve (même raisonnement pour la Terre) :

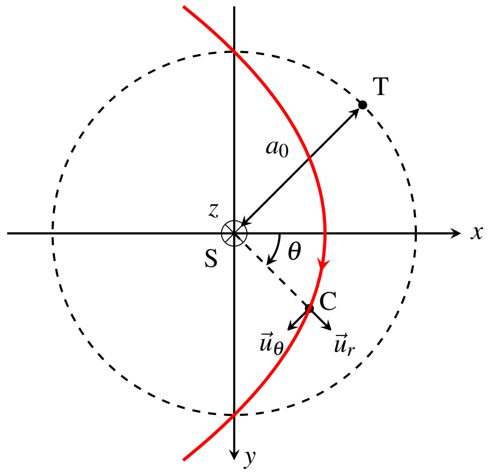
$$\vec{L}_{\mathrm{S}}(\mathrm{C}) = \overrightarrow{\mathrm{Cste}} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

La constante des aires est $C = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$. On l'exprime pour la comète à l'instant initial en notant qu'à cet instant $\vec{u}_y$ s'identifie à $\vec{u}_\theta$ donc $v_\theta(t=0) = 2v_0$.

$$C_C = \frac{a_0}{2} \times 2v_0 = a_0v_0$$

La Terre a un mouvement circulaire de rayon a_0 et de vitesse orthoradiale v_0 donc à tout instant $r = a_0$ et $v_\theta = v_0$: $C_T = a_0v_0 = C_C$. **Les constantes des aires de la Terre et de la comète sont identiques**.

5. La comète croise l'orbite terrestre lorsque $r(\theta) = a_0$. Au vu de l'expression fournie on conclut que cela correspond à $\cos\theta(t_0) = 0 \implies \boxed{\theta(t_0) = \pi/2}$. On trace ci-dessous l'allure de la trajectoire de la comète.



6. On exprime l'énergie mécanique de la comète à t_0 :

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2(t_0) - \frac{GmM_S}{a_0} \iff \boxed{v(t_0) = \sqrt{2}v_0}$$

7. On exprime le vecteur vitesse de la comète dans la base cylindrique : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On calcule $\dot{r}$ en utilisant l'expression fournie de $r(\theta)$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a_0}{1+\cos\theta}\right) = \frac{a_0\dot{\theta}\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

On l'évalue à t_0 pour laquelle $\theta(t_0) = \pi/2$: $\dot{r}(t_0) = a_0\dot{\theta}(t_0)$. On obtient alors que :

$$\vec{v}(t_0) = a_0\dot{\theta}(t_0)\vec{u}_r + a_0\dot{\theta}(t_0)\vec{u}_\theta = a_0\dot{\theta}(t_0)(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$$

D'après le résultat de la question précédente on peut écrire :

$$\|\vec{v}\|(t_0) = \sqrt{2}a_0\dot{\theta}(t_0) = \sqrt{2}v_0 \iff a_0\dot{\theta}(t_0) = v_0$$

On conclut enfin que $\boxed{\vec{v}(t_0) = v_0(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)}$.

8. Au moment où la comète rencontre la Terre cette dernière à comme vitesse $\vec{v}_{\text{Terre}} = v_0\vec{u}_\theta$. On en déduit que : $\|\vec{v}(t_0) - \vec{v}_{\text{Terre}}\| = \|v_0\vec{u}_r\| = v_0 = \boxed{30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

9. On applique le principe fondamental de la dynamique à la comète dans le référentiel héliocentrique :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{GmM_S}{C_C} \times \dot{\theta}\vec{u}_r$$

On a calculé précédemment la constante des aires de la comète : $C_C = a_0v_0$. Par ailleurs on a $GM_S = a_0v_0^2$. On obtient alors que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -v_0\dot{\theta}\vec{u}_r$$

On reconnaît ici que $-\dot{\theta}\vec{u}_r = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$. On écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0\vec{u}_\theta) \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - v_0\vec{u}_\theta) = \vec{0} \iff \boxed{\vec{v} - v_0\vec{u}_\theta = \overrightarrow{\mathrm{Cste}}}$$

On calcule l'expression de ce vecteur à l'instant initial. Le vecteur $\vec{u}_\theta$ s'identifie alors à $\vec{u}_y$:

$$\vec{v} - v_0\vec{u}_\theta = 2v_0\vec{u}_y - v_0\vec{u}_y = v_0\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{v} = v_0(\vec{u}_\theta + \vec{u}_y)}$$

10. Le produit scalaire peut s'exprimer de deux manières différentes. On utilise d'abord le résultat de la question précédente :

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = v_0(1 + \vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_y) = v_0(1+\cos\theta)$$

On peut également l'exprimer de la manière suivante :

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{C_C}{r} = \frac{a_0v_0}{r}$$

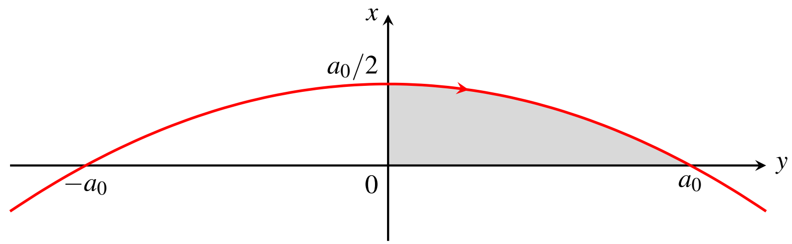
On conclut que :

$$\frac{a_0v_0}{r} = v_0(1+\cos\theta) \iff \boxed{r(\theta) = \frac{a_0}{1+\cos\theta}}$$

11. On exprime la date t_0 en utilisant la relation fournie, avec $\theta(t_0) = \pi/2$:

$$t_0 = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = \int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{C}\mathrm{d}\theta = \frac{a_0}{v_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)^2} \iff \boxed{t_0 = \frac{2a_0}{3v_0} = 38\,\text{jours}}$$

12. On représente d'une autre manière l'allure du graphe de la trajectoire. On met en évidence l'aire balayée par le vecteur $\vec{r}$ entre $t = 0$ et t_0.



La trajectoire est parabolique et au vu de son allure on trouve que l'équation cartésienne est $\boxed{x = \dfrac{a_0^2 - y^2}{2a_0}}$.

13. On calcule l'aire balayée avec l'intégrale suivante :

$$\mathscr{A} = \int_0^{a_0} x\mathrm{d}y = \int_0^{a_0}\frac{a_0^2 - y^2}{2a_0}\mathrm{d}y = \frac{1}{2a_0}\left[a_0^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{a_0} \iff \boxed{\mathscr{A} = \frac{a_0^2}{3}}$$

On utilise enfin la loi des aires selon laquelle la **vitesse aréolaire de la comète est constante** :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2} = \frac{a_0v_0}{2} \iff \mathscr{A} = \frac{a_0v_0}{2}t_0 = \frac{a_0^2}{3} \iff \boxed{t_0 = \frac{2a_0}{3v_0}}$$