TD20 : Mouvement d'un solide - corrigé

⋆ Exercice 1 : Centre d'inertie d'une ancre

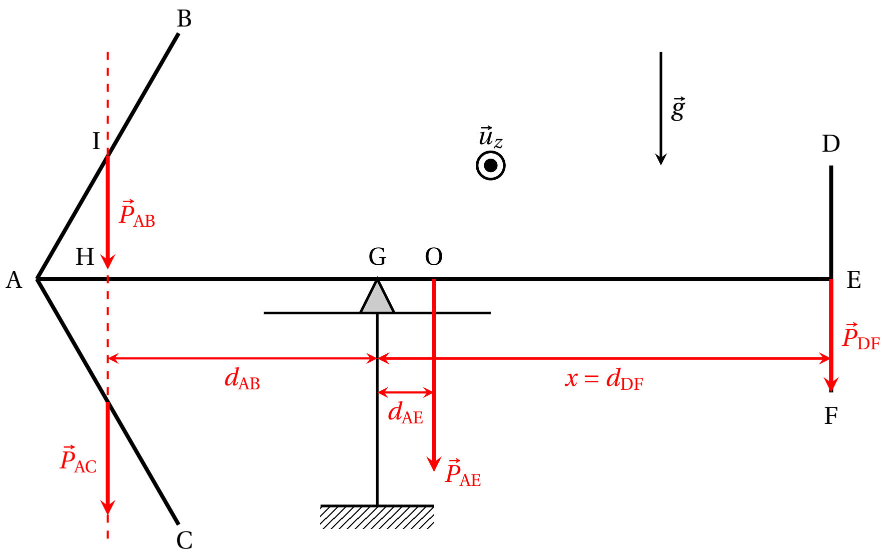
1. Puisque la masse est répartie de manière homogène dans l'ancre, cela signifie que la masse d'une portion est proportionnelle à sa longueur. La "longueur totale" des différentes parties de l'ancre vaut $6L$ et sa masse totale vaut m. On en déduit que les portions de longueur L ont une masse $\frac{m}{6}$ et la portion de longueur $3L$ a une masse $\frac{m}{2}$:

$$\boxed{m_{AB} = m_{AC} = m_{DF} = \frac{m}{6}} \quad \text{et} \quad \boxed{m_{AE} = \frac{m}{2}}$$

2. La droite (AE) est un axe de symétrie de l'ancre, par conséquent le centre d'inertie se trouve nécessairement sur cette droite. Étant donnée la réparition de la masse, elle ne peut se trouver qu'entre A et E.

3. Le poids de l'ancre s'applique en G. Si l'ancre repose en G sur le couteau, le moment du poids par rapport à (Gz) est nul (le bras de levier est nul) et l'ancre peut demeurer en équilibre.

4. On représente schématiquement le poids des différentes parties rectilignes ainsi que les bras de levier correspondants (on note O le centre du segment [AE]) :



Schématiquement, on observe que :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_{AB}) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AC}) = \frac{mg}{6} d_{AB} \quad ; \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AE}) = -\frac{mg}{2} d_{AE} \quad ; \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_{DF}) = -\frac{mg}{6} d_{DF}$$

On calcule les différents bras de levier, en commençant par le plus simple : $d_{DF} = x$. Ensuite :

$$d_{AE} = GO = GE - OE = x - \frac{3L}{2}$$

On termine avec d_{AB} que l'on exprime en utilisant les points I (centre de [AB]) et H (projeté de I sur [AE]) :

$$d_{AB} = HG = AE - AH - GE = 3L - AI\cos\frac{\pi}{3} - x = 3L - \frac{L}{4} - x = \frac{11L}{4} - x$$

On exprime enfin les différents moment de force :

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_{AB}) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AC}) = \left(\frac{11L}{4} - x\right)\frac{mg}{6}} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_{AE}) = -\left(x - \frac{3L}{2}\right)\frac{mg}{2}} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_{DF}) = -\frac{mg}{6}x}$$

Rq : Dans les calculs, nous avons implicitement fait l'hypothèse que G est "à gauche" de O, c'est-à-dire que $x > \frac{3L}{2}$. On vérifiera *a posteriori* cette hypothèse, une fois le calcul terminé.

5. Par définition du centre d'inertie G, le moment résultant du poids de l'ancre par rapport à (Gz) est nul, ce qui signifie que :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_{AB}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AC}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_{AE}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_{DF}) = 0 \iff 2 \times \left(\frac{11L}{4} - x\right)\frac{mg}{6} - \left(x - \frac{3L}{2}\right)\frac{mg}{2} - \frac{mg}{6}x = 0$$

On simplifie cette équation en multipliant tous les termes par $\frac{6}{mg}$. Après avoir développé les facteurs, on obtient :

$$\frac{22L}{4} - 2x - 3x + \frac{9L}{2} - x = 0 \iff 10L = 6x \iff \boxed{\frac{x}{L} = \frac{5}{3}}$$

Pour terminer, on vérifie le bien-fondé de notre hypothèse : $\frac{x}{L} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2}$. L'hypothèse est bien validée.

⋆ Exercice 2 : Mesurage du moment d'inertie d'un satellite

1. La période des oscillations d'un pendule de torsion de moment d'inertie I_0 et de couple de torsion C vaut $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{C}}}$.

Dans la deuxième expérience, on rajoute deux masselottes m sur les parois du satellite, à une distance R de l'axe de rotation. Chaque massellote rajoute au moment d'inertie du satellite une quantité mR^2.

Par conséquent, la période des oscillations devient $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2mR^2}{C}}}$.

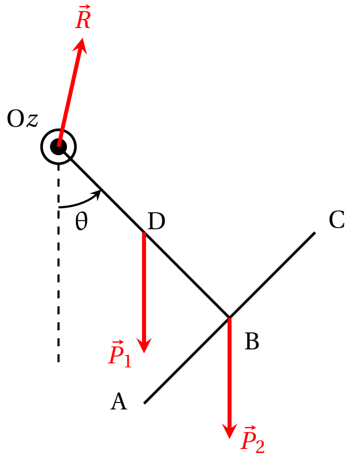
2. À partir des valeurs de T et T_0, on peut déterminer I_0 de la manière suivante :

$$C = \frac{4\pi^2 I_0}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 (I_0 + 2mR)}{T^2} \iff \frac{T^2}{T_0^2} = 1 + \frac{2mR^2}{I_0} \iff \boxed{I_0 = 2mR^2 \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2}}$$

En conclusion, la comparaison des périodes d'oscillations du pendule de torsion avec et sans masselottes permet de remonter à la valeur du moment d'inertie du satellite.

TD20 : Mouvement d'un solide - corrigé

⋆ Exercice 3 : Pendule pesant



1. Le poids de chaque tige s'applique en leur centre. On en déduit l'expression du moment de ces deux poids :

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = -mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = -mgL\sin\theta}$$

On applique ensuite le TMC au pendule, par rapport à (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On n'oublie pas de préciser que le pendule est soumis à la réaction de l'axe (Oz), dont le moment est nul car le bras de levier est nul ($\vec{R}$ s'applique en O).

$$(I_1 + I_2)\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) + \underbrace{\mathcal{M}_z(\vec{R})}_{=0} \iff \frac{17}{12}mL^2\ddot{\theta} = -mg\frac{3L}{2}\sin\theta$$

Après simplification, on aboutit à l'équation suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\sin\theta = 0}$$

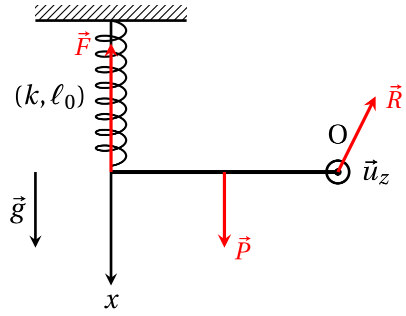
2. Les deux tiges ont la même masse. La première a son centre d'inertie en D, l'autre en B. On en déduit immédiatement que le centre d'inertie G de l'ensemble du pendule se trouve au centre du segment [DB], c'est-à-dire **à une distance $\frac{3L}{4}$ de l'axe de rotation**.

Il vient que l'on peut calculer directement le moment résultant du poids du pendule (masse $2m$) en appliquant ce poids en G. On obtient alors :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -2mg\frac{3L}{4}\sin\theta = -mg\frac{3L}{2}\sin\theta$$

On retrouve, comme c'était attendu, l'expression du moment résultant que l'on a déterminé à la question précédente en travaillant séparemment sur les deux tiges rectilignes. On retrouve par conséquent la même équation du mouvement.

⋆ Exercice 4 : Mouvement d'un système {tige + ressort}



1. On applique le TMC à la tige en équilibre horizontal dans le référentiel terrestre supposé galiléen, par rapport à l'axe (Oz) :

$$0 = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}) + \underbrace{\mathcal{M}_z(\vec{R})}_{=0}$$

On exprime les deux moments de force :

$$0 = mg\tfrac{L}{2} - kL(\ell_{eq} - \ell_0) \iff \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$

2. On applique le TMC dans le cas où la tige est en mouvement :

$$J_z\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta - kL(\ell - \ell_0)\cos\theta$$

avec $\cos\theta \sim 1$ et $\ell = \ell_{eq} + L\sin\theta \sim \ell_0 + \frac{mg}{2k} + L\theta$. On transforme l'équation du mouvement :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2} - kL\left(\frac{mg}{2k} + L\theta\right) = -kL^2\theta \iff \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On vient de montrer que les petites oscillations de la tige **sont harmoniques**. La période propre des oscillations vaut $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}$.

⋆⋆ Exercice 5 : Une balançoire

1. On commence par les tiges OA et O'A' :

- Leur mouvement est une **rotation** d'angle θ et leur énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$.

- Leur centre d'inertie se trouve au centre de la tige, à une altitude $z = -\frac{L}{2}\cos\theta$ (en prenant pour origine le point O). L'énergie potentielle de pesanteur de chacune de ces deux tige vaut $E_p = mgz = -mg\frac{L}{2}\cos\theta$.

On termine par la tige AA'.

- Son mouvement est une **translation circulaire** à la vitesse $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Son énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$.

- Son centre d'inertie se trouve à l'altitude $z = -L\cos\theta$. Son énergie potentielle de pesanteur vaut $E_p = -mgL\cos\theta$.

En conclusion l'énergie mécanique totale de la balançoire vaut :

$$E = 2\left(\frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 - mg\frac{L}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta \iff \boxed{E = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}^2 - 2mgL\cos\theta}$$

2. Le système étudié est **conservatif** car toutes les liaisons sont idéales et le poids est conservatif. Par conséquent, l'énergie mécanique se conserve. L'équation de conservation de l'énergie mécanique obtenue à la question précédente est une **intégrale première du mouvement**. On obtient l'équation du mouvement en la dérivant par rapport au temps :

$$0 = \frac{5}{6}mL^2\left(2\dot\theta\ddot\theta\right) + 2mgL\dot\theta\sin\theta \iff \boxed{\dot\theta\left(\ddot\theta + \frac{6g}{5L}\sin\theta\right) = 0}$$

Dans le cas où $\dot\theta$ n'est pas nulle à tout instant, alors le mouvement de la balançoire satisfait une équation différentielle de type pendulaire. Dans l'approximation des oscillations de petite amplitude, celles-ci deviennent harmoniques, de période :

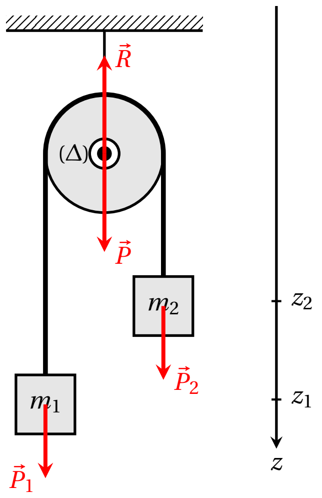
$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{6g}}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Inertie d'une poulie

1. D'après l'énoncé le fil est inextensible, ce qui signifie que **tous les points du fil se déplaçent à la même vitesse (en norme) dans le référentiel lié au centre de la poulie, c'est-à-dire le référentiel terrestre**. Notons v cette vitesse commune et supposons, pour fixer arbitrairement les signes, que la masse m_1 chute tandis que m_2 s'élève. On a alors $v = \dot z_1 = -\dot z_2$. Compte tenu de l'orientation de (Δ), les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique, ce qui signifie que $\Omega > 0$ si m_1 chute. Un point qui se trouve sur la circonférence de la poulie a un mouvement circulaire de rayon R et sa vitesse vaut $v = R\Omega$. Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{\dot z_1 = R\Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot z_2 = -R\Omega}$$

2.



On représente schématiquement les forces **extérieures** qui s'exercent sur le système {masses + fils + poulie} : les poids $\vec P_1$ et $\vec P_2$ de chaque masse, le poids $\vec P$ de la poulie et la réaction $\vec R$ de l'axe qui supporte la poulie. Il y a également des forces intérieures à ce système {forces d'interaction entre le fil et chacune des masses, frottements entre le fil et la poulie, forces de cohésion interne du fil) : on retient de l'énoncé, qui demande de l'admettre, que la puissance résultante de l'ensemble de ces forces est nulle, bien que ce système soit déformable.

Les forces $\vec P$ et $\vec R$ s'appliquent en un point fixe dans le référentiel terrestre (le centre de la poulie), par conséquent leur puissance est nulle. Finalement, seuls les poids $\vec P_1$ et $\vec P_2$ travaillent :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec P_1) + \mathscr{P}(\vec P_2) = m_1 g\dot z_1 + m_2 g \dot z_2 = (m_1 - m_2)gR\Omega$$

On exprime l'énergie cinétique totale du système comme la somme de l'énergie cinétique de translation de m_1, celle de m_2 et l'énergie cinétique de rotation de la poulie :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot z_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot z_2^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)R^2\Omega^2$$

En réinjectant l'expression de E_c dans le TPC, on aboutit à :

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)R^2\dot\Omega\Omega = (m_1 - m_2)gR\Omega$$

En supposant enfin que le système n'est pas en équilibe ($\Omega \neq 0$), on obtient :

$$\boxed{\dot\Omega = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\cdot\frac{g}{R}}$$

Sachant qu'à l'instant initial, $\Omega(0) = 0$ car les masses sont immobiles, cette équation s'intègre immédiatement de la manière suivante :

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\cdot\frac{gt}{R}}$$

Notons θ la position angulaire de la poulie et fixons arbitrairement $\theta(0) = 0$. Par une nouvelle intégration, on obtient :

$$\theta(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\cdot\frac{gt^2}{2R}$$

La poulie a effectué un premier tour complet lorsque :

$$\theta = 2\pi \iff \boxed{t = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 - m_2}\cdot\frac{4\pi R}{g}} = 2{,}9\,\mathrm{s}}$$

À ce moment-là, la vitesse de rotation de la poulie vaut :

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\cdot\frac{4\pi g}{R}} = 42\,\text{tours/min}}$$

3. On applique le PFD à la masse m_1 dans le référentiel terrestre. Elle est soumise à son poids $\vec{P}_1 = m_1 g \vec{u}_z$ et à la tension $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{u}_z$ du fil. On projette directement le PFD sur $\vec{u}_z$:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - T_1 \iff T_1 = m_1(g - \ddot{z}_1) = m_1(g - R\dot{\Omega})$$

En utilisant le résultat de la question 2., on aboutit à :

$$\boxed{T_1 = \frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_1 g = 92\,\mathrm{N}}$$

Le PFD appliqué à la masse m_2 conduit, par un calcul analogue, à :

$$\boxed{T_2 = \frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_2 g = 54\,\mathrm{N}}$$

4. On applique le TMC à la poulie, par rapport à (Δ), dans le référentiel terrestre. Les moments de $\vec{P}$ et de $\vec{R}$ sont nuls car leur bras de levier est nul. Seul le fil exerce un moment résultant non nul (logique puisque c'est lui qui met la poulie en mouvement) :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\text{fil}} = I\dot{\Omega} = \frac{1}{2} MRg \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 19\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Pendule de Holweck-Lejay

1. Le pendule est soumis à deux actions antagonistes :

- le poids entraîne la masse vers le point le plus bas ($\theta = \pi$),
- le couple de rappel du ressort spirale ramène la masse vers le point le plus haut ($\theta = 0$).

Pour déterminer laquelle de ce deux actions est prédominante, il faut comparer les **moments** qu'elles produisent par rapport à l'axe de rotation. Le ressort exerce un couple $\Gamma = -C\theta$ par rapport à (Oz). Le moment du poids par rapport à (Oz) vaut $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = mg\ell \sin\theta$.

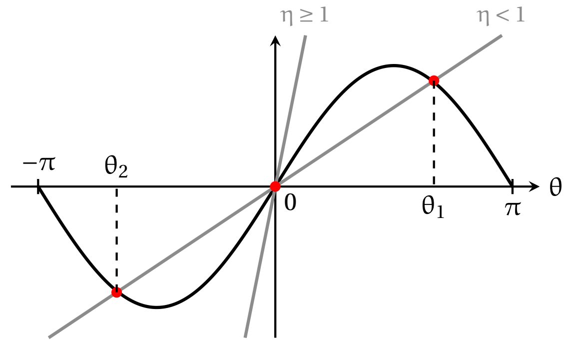
- si $C \gg mg\ell$ alors le couple de rappel est prépondérant. On s'attend à ce que la position d'équilibre de la masse se trouve à proximité de $\theta = 0$.
- si $C \ll mg\ell$ alors le moment du poids est prépondérant. On s'attend à ce que la position d'équilibre de la masse se trouve à proximité de $\theta = \pi$.

2. On raisonne de manière énergétique. L'énergie potentielle du ressort spirale vaut $E_{\text{p,el}} = \frac{1}{2}C\theta^2$ et l'énergie potentielle de pesanteur de la masse vaut $E_{\text{p,pes}} = mg\ell\cos\theta$. L'énergie potentielle totale vaut donc : $E_\text{p} = \frac{1}{2}C\theta^2 + mg\ell\cos\theta$.

On détermine les positions d'équilibre :

$$\frac{dE_\text{p}}{d\theta} = 0 \iff C\theta - mg\ell\sin\theta = 0 \iff \boxed{\sin\theta = \frac{C}{mg\ell}\theta}$$

On recherche les solutions de cette équation, en posant $\eta = \frac{C}{mg\ell}$. Pour cela, on trace de le graphe de $\sin\theta$ et $\eta\theta$, pour différentes valeurs de η.



- si $C \geq mg\ell$ ($\eta \geq 1$) alors l'unique position d'équilibre se trouve en $\theta = 0$.
- si $C < mg\ell$ ($\eta < 1$) alors il existe trois positions d'équilibre : $\theta = 0$ et deux positions θ_1 et θ_2 symétriques l'une de l'autre par rapport à $\theta = 0$.

3. On détermine le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en $\theta = 0$:

$$\frac{d^2E_\text{p}}{d\theta^2} = C - mg\ell\cos\theta \iff \frac{d^2E_\text{p}}{d\theta^2}(\theta = 0) = mg\ell(\eta - 1)$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ est stable à condition que $\boxed{\eta > 1}$.

4. La pulsation des petites oscillations harmoniques autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ vaut :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m\ell^2}\frac{d^2E_\text{p}}{d\theta^2}(\theta = 0)} = \sqrt{(\eta - 1)\frac{g}{\ell}} \iff \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{(\eta - 1)g}}}$$

5. On dérive T par rapport à g :

$$\frac{dT}{dg} = \frac{d}{dg}\left(2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{C - mg\ell}}\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)(-m\ell)\sqrt{\frac{m\ell^2}{(C - mg\ell)^3}} = \pi m\ell\sqrt{\frac{m\ell^2}{m^3 g^3 \ell^3 (\eta - 1)^3}} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g^3(\eta - 1)^3}} = \frac{T}{2g(\eta - 1)}$$

d'où : $\boxed{\frac{dT}{T} = \frac{dg}{2g(\eta - 1)}}$. Pour un pendule simple, $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ et l'on montre que $\boxed{\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dg}{2g}}$.

Le pendule de Holweck-Lejay, lorsqu'il est utilisé pour osciller autour de $\theta = 0$, est beaucoup plus sensible aux variations du champ de pesanteur qu'un pendule simple, et ce d'autant plus que η est proche de 1. En choisissant la constante de rappel du ressort de manière appropriée, on peut construire un dispostif qui réagit fortement aux variations de champ de pesanteur, et donc qui pourrait faire office de **gravimètre**.

⋆⋆ Exercice 8 : Expérience de Cavendish

La première étape de l'expérience de Cavendish permet de déterminer la valeur de la constante de rappel du fil de torsion. Le pendule de Cavendish est assimilée à deux masses ponctuelles m_b éloignées d'une distance $\frac{L}{2}$ de l'axe de rotation. Le moment d'inertie du pendule vaut $J = 2m_\mathrm{b}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{b}L^2$.

La période des oscillations d'un fil de torsion vaut :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathrm{C}}} \iff \boxed{\mathrm{C} = \frac{4\pi^2 J}{T^2} = \frac{2\pi^2 m_\mathrm{b} L^2}{T^2}}$$

La deuxième étape permet déterminer la force gravitationnelle qui s'exerce entre les masses de plombs m_p et m_b. Si l'on suppose que la force gravitationnelle est parfaitement orthoradiale, alors le moment total qu'exercent les deux masses m_p sur le pendule vaut :

$$\mathscr{M}_\Delta = 2F_\mathrm{grav}\frac{L}{2} = \frac{Gm_\mathrm{b}m_\mathrm{p}}{r^2}L$$

À l'équilibre, ce moment compense exactement le couple exercé par le fil de torsion :

$$\frac{Gm_\mathrm{b}m_\mathrm{p}}{r^2}L = C\alpha_\mathrm{eq} = \frac{2\pi^2 m_\mathrm{b}L^2}{T^2}\alpha_\mathrm{eq} \iff \boxed{G = \frac{2\pi^2 L r^2 \alpha_\mathrm{eq}}{T^2 m_\mathrm{p}} = 6{,}6\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}}$$

La valeur obtenue est cohérente.