

## Corrigé DS5

### Exercice 1 : Microscope à force atomique en mode oscillant

1. On effectue une analyse dimensionnelle de la relation entre la flèche  $z$  et la force  $F_{\text{ext}}$  :

$$L = \frac{L^3}{[E]L^4} [F] \iff [E] = \frac{[F]}{L^2}$$

Le module d'Young est homogène à une force surfacique, autrement dit à une **pression**.

2. Notons  $\vec{F}_{\text{rappel}}$  la contrainte qui agit sur le système levier-pointe lorsque celui-ci est déformé. En présence de la force  $\vec{F}_{\text{ext}}$  le système atteint un état d'équilibre caractérisé par (première loi de Newton) :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} + \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{F}_{\text{rappel}} = -\vec{F}_{\text{ext}} = -\frac{Eae^3}{4L^3} z \vec{e}_z$$

Cette force est semblable à la force de rappel exercée par un ressort élastique de longueur à vide nulle et

de raideur  $k = \frac{Eae^3}{4L^3}$ .

L'application numérique donne  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

3. Le système levier-pointe est soumis à la force de rappel  $\vec{F}_{\text{rappel}}$  dont on suppose que l'expression reste valable hors équilibre et à la force de frottement  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ . On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse  $m$  équivalente dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}$$

On projette sur  $\vec{e}_z$  :

$$\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} \iff \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

Par identification on trouve  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ .

4. L'équation différentielle est homogène. L'hypothèse d'un amortissement faible revient à dire que  $Q \gg 1$ . On écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant vaut  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0$  et les deux racines sont :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Puisque  $Q \gg 1$  on peut faire l'approximation suivante :  $r_{1,2} \approx -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$ . La solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$z(t) \approx \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

On détermine les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  avec les conditions initiales  $z(0) = z_0$  et  $\dot{z}(0) = 0$  (pas de vitesse initiale) :

$$\begin{cases} A = z_0 \\ -\frac{\omega_0}{2Q} A + \omega_0 B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = z_0 \\ B = \frac{z_0}{2Q} \end{cases}$$

On constate que  $|B| \ll |A|$ , on peut donc négliger le terme  $B \sin(\omega_0 t)$ . On conclut que :

$$z(t) \approx z_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \cos(\omega_0 t)$$

5. On reprend le principe fondamental de la dynamique projeté sur  $\vec{e}_z$ , en ajoutant cette fois-ci la force excitatrice :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} + F_m \cos(\omega t) \iff \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = A \cos(\omega t)$$

6. On passe l'équation différentielle dans l'espace complexe :

$$\left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) Z_0 = A \iff Z_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

On calcule le module de cette amplitude complexe :

$$|Z_0| = \left| \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \right| \iff \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Par identification on trouve  $Z_m = \frac{A}{\omega_0^2} = \frac{F_m}{k}$ .

7. Le déplacement  $z(t)$  du système entre en résonance si l'amplitude réelle des oscillations  $|Z_0|(\omega)$  est maximale pour  $\omega \in ]0, +\infty[$ , autrement dit si le dénominateur est minimal. On étudie les variations de la fonction  $f : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ .

$$f'(x) = 0 \iff 2(-2x)(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0$$

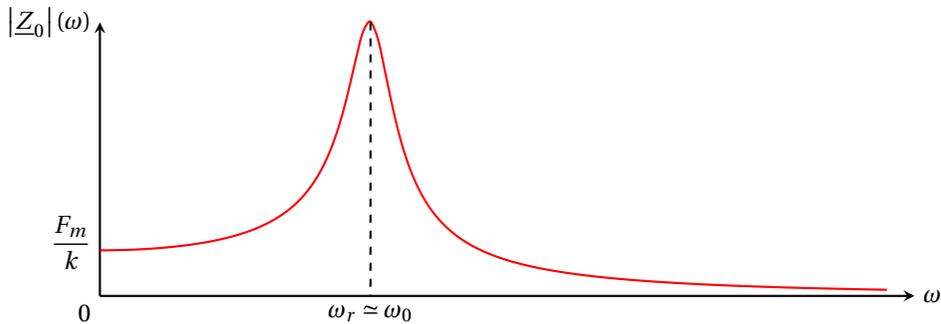
$$\iff 2x \left[ 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \right] = 0$$

On exclut le cas  $x = 0$ . Il reste :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \iff \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette pulsation de résonance est définie à condition que  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

8. Dans le cas d'un amortissement faible on a  $\omega_r \approx \omega_0$  et la résonance est aiguë.



9. On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique en ajoutant la force d'interaction entre le système et la surface :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} + F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) + (z - z_{\text{eq}}) \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \left( \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right) z = F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) - z_{\text{eq}} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

On identifie une nouvelle pulsation propre dans le membre de gauche :

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{m\omega_0^2} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right)$$

Sachant que  $k = m\omega_0^2$  on trouve finalement  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}}$ .

10. D'après la figure 2 :  $d(z) = d_0 - z$  donc :

$$F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d_0 - z)^2} \Leftrightarrow \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{HR}{3(d_0 - z_{\text{eq}})^3}$$

11. Le résultat de la question 9 conduit à :

$$\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}} \Leftrightarrow \frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{HR}{3k(d_0 - z_{\text{eq}})^3}}$$

On prend  $d_0 - z_{\text{eq}} = 10 \text{ nm}$  pour effectuer l'application numérique :  $\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1,2 \cdot 10^{-6}$ . Le décalage relatif est négatif donc il se produit **vers les basses fréquences**.

## Exercice 2 : Traitement d'un signal

1. Au vu du graphe de la figure 2, on peut estimer à **environ 10 mV** la valeur moyenne du signal.

2. On voit qu'un même motif se répète avec une période  $T = 3,1 \text{ ms}$ . Cela correspond à une fréquence  **$f = 1/T = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$** .

3. Au vu des valeurs données dans le tableau 1, on peut penser qu'il s'agit de la corde de **Mi aigu** (si elle est jouée à vide, c'est-à-dire sans être pincée).

4. Le signal enregistré par le microphone **n'est pas sinusoïdal**. Par conséquent, son spectre présentera forcément des harmoniques.

5. En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la tension aux bornes de  $R$  est nulle car le courant est nul :  $s(t) = 0$  en BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil :  $s(t) = e(t)$  en HF. Ce filtre atténue les basses fréquences et transmet les hautes fréquences, il s'agit d'un **passé-haut**.

6. On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}}$$

On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre. On identifie la pulsation de coupure :  **$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$** .

7. La fréquence de coupure vaut  $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9 \text{ Hz}$ . Elle est faible devant la fréquence fondamentale du signal enregistré. Par conséquent, la partie variable du signal est transmise sans atténuation ni déformation. En revanche, la composante continue est éliminée. **Ce filtre a pour rôle de supprimer la composante continue du signal.**

8. On rappelle que pour un ALI idéal en régime linéaire :  $V_+ = V_-$  et  $I_+ = I_- = 0$ . On remarque qu'ici :  $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{E}$ . On applique la loi des nœuds en termes de potentiels au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\frac{-\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E} - \underline{S}}{\underline{Z}'}$$

Après simplification, on obtient l'expression de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

9. Dans le cas où les deux impédances sont des résistances, on obtient :

$$\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$$

Le montage est alors un **amplificateur non-inverseur, son rôle consiste à amplifier le signal**.

10. L'impédance équivalente vaut :

$$Z_{\text{eq}} = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$$

11. La fonction de transfert vaut :

$$H_2 = 1 + \frac{Z_{\text{eq}}}{R_3} = 1 + \frac{R_2}{R_3(1 + jR_2 C_2 \omega)}$$

12. La fonction de transfert est déjà sous la forme attendue, avec :

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

13. En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_2$ ) :  $H \approx 1 + G_0$ . En haute fréquence ( $\omega \gg \omega_2$ ) :  $H \approx 1$ .

14. Numériquement, on a :

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad G_0 = 113$$

La fréquence caractéristique  $f_2$  est comprise entre la fréquence fondamentale du signal enregistré par le microphone et celle de l'harmonique de rang 2. Par conséquent le gain est quasiment égal à  $G_0$  pour le fondamental tandis qu'il décroît dès le premier harmonique pour tendre vers 1 en haute fréquence. **Ce filtre amplifie principalement la composante fondamentale du signal pour renforcer son poids dans le spectre par rapport aux harmoniques.**

15. L'entrée de ce filtre est directement connectée à l'entrée non-inverseuse de l'ALI donc l'impédance d'entrée est **infinie**. C'est un avantage car cela garantit qu'il n'y aura **pas d'effet diviseur de tension entre les deux filtres en cascade** (et ce quelque soit l'impédance de sortie de ( $F_d$ )). On pourra donc écrire la fonction de transfert globale sous la forme  $H = H_1 H_2$ .

16. La composante continue du signal  $u_e(t)$  est égale à 10 mV et la fréquence fondamentale est légèrement supérieure à 300 Hz. C'est cohérent avec l'analyse du signal que l'on a mené aux questions 1 et 2.

17. Le spectre de la tension  $u_1(t)$  doit être identique à celui de la tension  $u_e(t)$ , sans la composante continue. Il s'agit donc du **spectre (a)**.

18. Dans le spectre de la tension  $u_2(t)$ , il n'y a pas de composante continue et l'amplitude du fondamental doit être environ 100 fois plus élevée que dans le spectre de  $u_e(t)$ , c'est-à-dire légèrement inférieure à 2000 mV. Le seul spectre qui convient est le **spectre (d)**.

### Exercice 3 : Rencontre de deux satellites

$$1. \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$$

2. Voir cours.

3. Voir cours. Cette constante est la **constante des aires**.

4.  $C = r^2 \dot{\theta} = \text{Cste}$ . Or, pour une trajectoire circulaire,  $r = \text{Cste}$  donc  $\dot{\theta} = \text{Cste} \implies v = r\dot{\theta} = \text{Cste}$ . Le mouvement est bien uniforme.

$$5. \text{ Voir cours pour la démo. } v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

$$6. \text{ Voir cours pour les calculs et la 3}^\circ \text{ loi de Képler : } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad \text{et} \quad E_0 = -\frac{GmM}{2r_0}$$

7. La trajectoire est elliptique si le satellite est dans un état lié, c'est-à-dire si  $E < 0$ . D'après l'énoncé, l'énergie mécanique, après la poussée, vaut :

$$E = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{1}{2} m(Kv_0)^2 = -\frac{GmM}{r_0} + K^2 \times \frac{GmM}{2r_0} = \frac{GmM}{2r_0} (K^2 - 2)$$

On voit bien que  $E < 0$  ssi  $K < \sqrt{2}$ .

8. Au cours d'une révolution de A, le satellite B doit tourner d'un angle  $2\pi + \alpha$ . Sachant que sa vitesse angulaire de B est constante, la période de A doit être égale à  $T_0 \times \frac{2\pi + \alpha}{2\pi} = T_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$ .

$$9. E = -\frac{GmM}{2a}. \text{ Par identification avec l'expression de la question 7. :}$$

$$\frac{GmM}{2a} = \frac{GmM}{2r_0} (K^2 - 2) \implies a = \frac{r_0}{2 - K^2}$$

10. D'après la troisième loi de Képler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \implies T_0^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \times \frac{(2 - K^2)^3}{r_0^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \implies \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 (2 - K^2)^3 = 1$$

$$11. \text{ AN : } K = \sqrt{2 - \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}} = 1,04$$