

# DS de physique n° 5

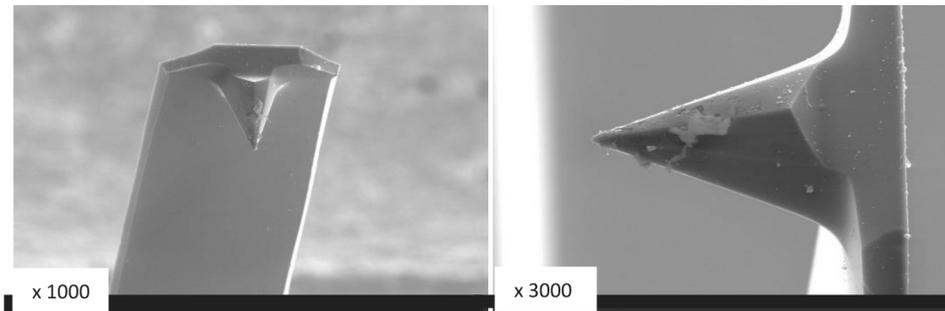
Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.

## Exercice 1 : Microscope à force atomique en mode oscillant

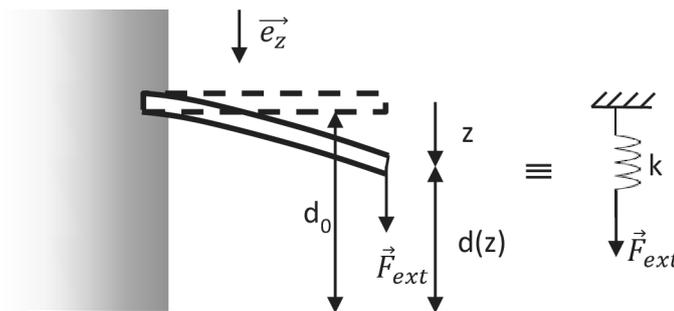
La résolution d'un microscope optique est limitée par la diffraction à une centaine de nanomètres. Différents phénomènes physiques peuvent être exploités pour imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm. Nous étudions dans ce problème le microscope à force atomique (ou AFM pour *Atomic Force Microscope*).

La sonde de mesure d'un AFM est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixée une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via les forces de Van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres. Le mode oscillant permet, sans contact avec l'échantillon et donc sans risque de l'endommager, de mesurer le gradient de la force d'interaction entre la pointe et l'échantillon. Les photographies de la figure 1 représentent la pointe d'un microscope à force atomique. Elles ont été obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB).



**Figure 1.** Images MEB d'une pointe AFM

La pointe du microscope se situe sous un levier parallélépipédique de longueur  $L$ , de largeur  $a$  et d'épaisseur  $e$  encastré horizontalement dans une paroi. Au repos, le système levier-pointe, de masse  $m$ , est horizontal, à la hauteur  $d_0$  de l'échantillon (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale  $\vec{F}_{ext}$  (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre du système, celui-ci est déformé. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance  $z$  que l'on appelle la flèche (voir figure 2 ci-dessous) et se trouve alors à une distance  $d(z)$  de l'échantillon.



**Figure 2.** Système encastré dans une paroi et modèle

On admet que lorsque le système levier-pointe est soumis à une force  $\vec{F}_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}\vec{e}_z$  constante la flèche à l'équilibre  $z_{\text{eq}}$  est donnée par la relation suivante :  $z_{\text{eq}} = \frac{4L^3}{Eae^3}F_{\text{ext}}$  où  $E$  est appelé module d'Young du matériau constituant le levier et la pointe.

1. Quelle est la dimension du module d'Young  $E$  ?
2. En se plaçant à l'équilibre justifier que l'on peut modéliser le système levier-pointe par un ressort de longueur à vide nulle dont on donnera l'expression de la raideur  $k$  en fonction de  $E$ ,  $a$ ,  $L$  et  $e$ .  
Déterminer numériquement  $k$  pour une fibre de longueur  $L = 2,0 \cdot 10^2 \mu\text{m}$ , de largeur  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 5,0 \mu\text{m}$ .  
Le module d'Young vaut  $E = 1,0 \cdot 10^{11}$  USI.

Dans un premier temps on ne considère pas les forces d'interaction entre la pointe et l'échantillon. Le levier et la pointe sont seuls. On assimile le système levier-pointe à une masse ponctuelle  $m$  attachée à un ressort élastique de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle, en mouvement vertical de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ . On tient compte d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ . On place le système dans la position initiale  $z_0$  et on le lâche sans vitesse initiale.

3. Établir l'équation du mouvement du système levier-pointe :  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ . Donner les expressions littérales de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ .
4. En supposant le système faiblement amorti montrer que  $z(t) \simeq z_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\omega_0 t)$ . On justifiera soigneusement les approximations effectuées.

Désormais on suppose que le déplacement d'une céramique piézoélectrique soumet le système levier-pointe à une force excitatrice  $\vec{F}_{\text{ext}} = F_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$ . On étudie les oscillations forcées du système. On note  $A = \frac{F_m}{m}$  et  $z(t) = \text{Re}[Z_0 e^{j\omega t}]$ .

5. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $z(t)$  en fonction des paramètres  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .
6. Exprimer l'amplitude complexe  $Z_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Montrer que son module s'exprime sous la forme  $|Z_0| = \frac{Z_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$  avec  $x = \omega/\omega_0$ . Déterminer l'expression littérale de  $Z_m$ .
7. Établir l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_0$  et de  $Q$ . À quelle condition sur le facteur de qualité la résonance existe-t-elle ?
8. Tracer l'allure de  $|Z_0|$  en fonction de  $\omega$  dans le cas où l'amortissement est faible. Faire apparaître l'expression de l'amplitude des oscillations dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ .

On prend à présent en considération, en plus de la force excitatrice, la force d'interaction entre la pointe et la surface que l'on écrira formellement  $\vec{F}_{\text{int}} = F_{\text{int}}\vec{e}_z$ , avec  $F_{\text{int}}$  qui dépend de la position  $z$  de la pointe. En faisant l'hypothèse que le système levier-pointe effectue des oscillations de faible amplitude comparé à la distance caractéristique de variation de  $F_{\text{int}}(z)$  on peut effectuer le développement de Taylor suivant à l'ordre 1 :  $F_{\text{int}}(z) \simeq F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) + (z - z_{\text{eq}}) \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$  où  $z_{\text{eq}}$  est la position d'équilibre du système que l'on ne cherchera pas à calculer.

9. Montrer que la nouvelle pulsation propre s'écrit  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}}$ .

On admet que  $F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d(z))^2}$  où  $R$  est le rayon de courbure de la pointe et  $H = 1,4 \cdot 10^{-20}$  USI est la constante de Hammacker.

10. À l'aide de la figure 2 déterminer une relation entre  $z$ ,  $d_0$  et  $d(z)$ , puis exprimer  $\left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$ .
11. Pour un rayon de courbure de 10 nm et une distance pointe-échantillon de 10 nm, évaluer l'écart relatif en termes de pulsation de résonance que génère l'existence d'une interaction. Se produit-il vers les hautes ou les basses fréquences ?

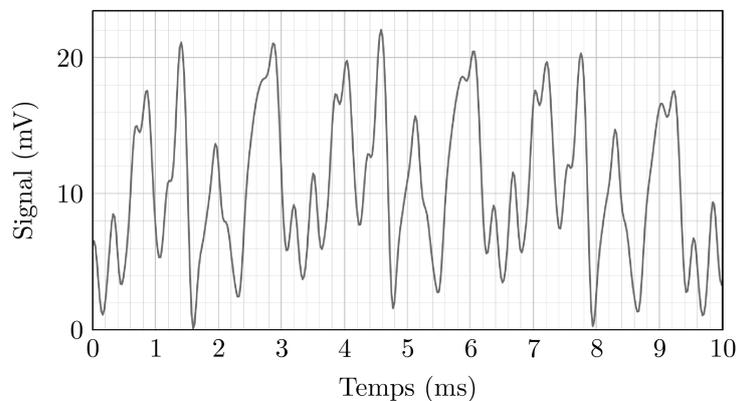
## Exercice 2 : Traitement d'un signal

Une guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence ( $f_{ac}$ )
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

**Tableau 1** Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

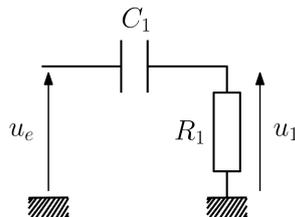
La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.



**Figure 2** Signal de la guitare

1. Donner une valeur approximative de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre ( $F_a$ )).



**Figure 3** Filtre ( $F_a$ )

5. Quelle est la nature de ce filtre ?
6. Déterminer sa fonction de transfert  $H_1$  et exprimer littéralement sa pulsation de coupure  $\omega_1$ .
7. On a choisi  $R_1 = 100\text{k}\Omega$  et  $C_1 = 100\text{nF}$ . Déterminer numériquement la fréquence de coupure  $f_1$  à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

À la sortie du premier filtre, le signal est envoyé sur un second filtre représenté sur la figure 4 (filtre ( $F_b$ )). Dans les questions qui suivent, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Considérons d'abord le filtre de la figure 4(a).

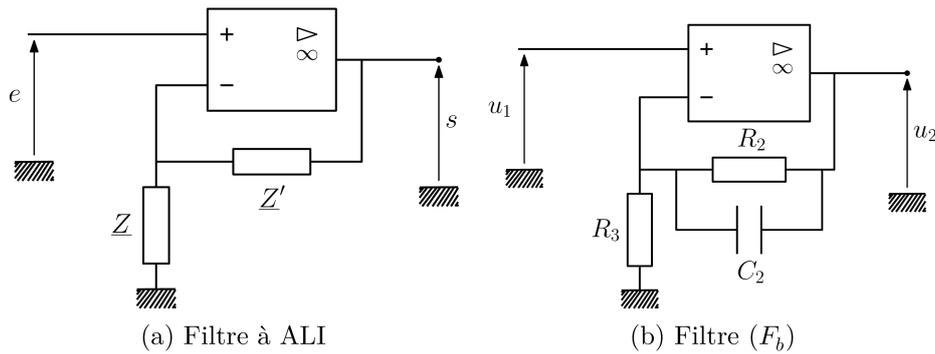


Figure 4 Deux filtres

8. Exprimer sa fonction de transfert  $\underline{H}$  en fonction de  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}'$ .
9. Que devient  $\underline{H}$  si  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}'$  sont des résistances ( $\underline{Z} = R$ ,  $\underline{Z}' = R'$ ) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

On considère maintenant le signal  $u_1(t)$ , sinusoïdal de pulsation  $\omega$  qui est envoyé sur le filtre ( $F_b$ ).

10. Quelle est l'impédance  $\underline{Z}_{\text{eq}}$  de la branche constituée par  $R_2$  en parallèle avec  $C_2$  ?
11. Dédurre de la question 8 l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}_2$  de ce filtre en fonction de  $R_2$ ,  $R_3$  et  $C_2$ .
12. Mettre  $\underline{H}_2$  sous la forme

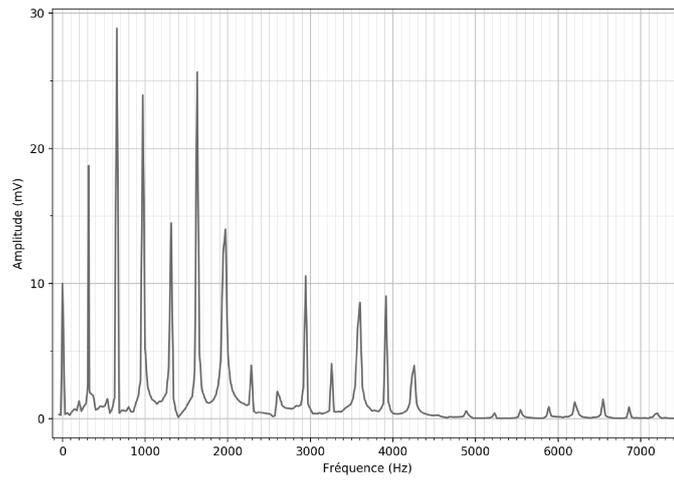
$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de  $G_0$  et  $\omega_2$ .

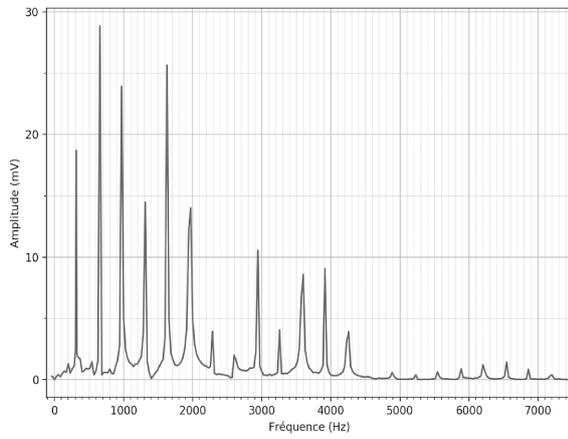
13. Quelle est la limite de  $\underline{H}_2$  en basse fréquence ? en haute fréquence ?
14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique  $f_2$  correspondant à  $\omega_2$  si  $R_2 = 680\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 6,00\text{k}\Omega$  et  $C_2 = 470\text{pF}$  ainsi que  $G_0$ . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.
15. Quelle est l'impédance d'entrée de ce filtre ? Expliquer en quoi cela est un avantage sachant que le filtre ( $F_b$ ) est placé en cascade derrière ( $F_a$ ).

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée  $u_e$  représenté sur la figure 2.

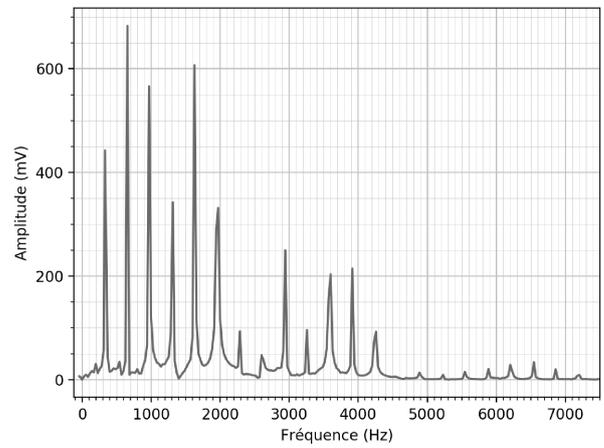
16. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
17. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre ( $F_a$ ).
18. Même question, pour la sortie du filtre ( $F_b$ ).



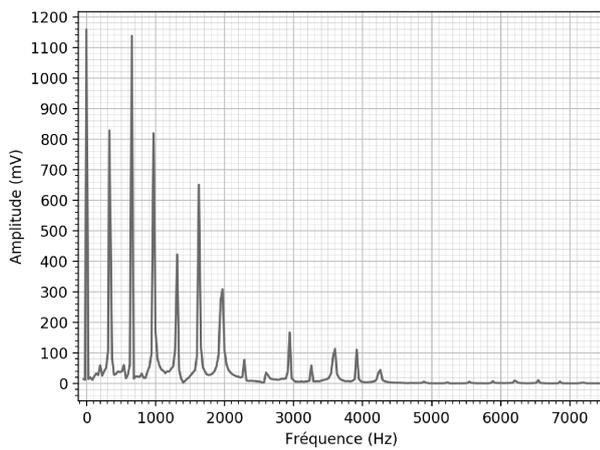
**Figure 6** Spectre du signal d'entrée



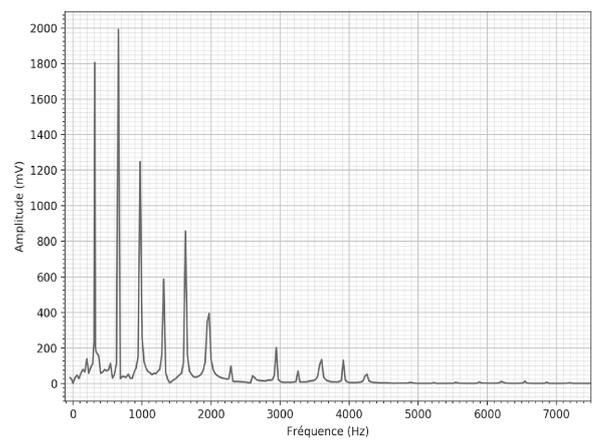
(a)



(b)



(c)

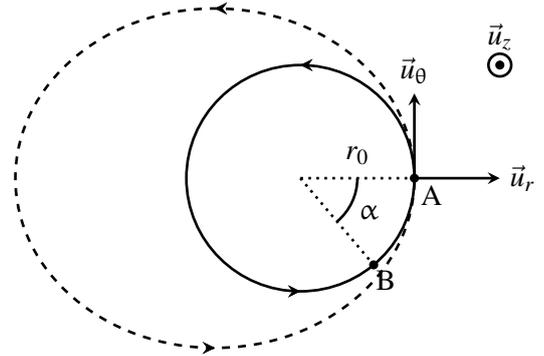


(d)

**Figure 7** Spectres

### Exercice 3 : Rencontre de deux satellites

Deux satellites identiques A et B, de masse  $m$ , gravitent autour d'un astre de masse  $M \gg m$  sur une même orbite circulaire de rayon  $r_0$ . Leurs positions sont distantes d'un angle  $\alpha$  constant. On repère leur mouvement dans la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  (voir schéma ci-contre). Le référentiel d'étude, lié à un repère dont l'origine est au centre d'inertie de l'astre et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines, est supposé galiléen.



1. Donner l'expression, dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , de la force gravitationnelle exercée par l'astre sur les satellites.
2. Montrer que le moment cinétique des satellites est constant. Justifier que le mouvement est plan.
3. Montrer que la grandeur  $C = r^2\dot{\theta}$  se conserve au cours du mouvement. Comment s'appelle cette constante ?
4. Justifier, à partir du résultat de la question précédente, qu'un mouvement circulaire est nécessairement uniforme.
5. Déterminer littéralement leur vitesse  $v_0$  en fonction  $M$  et  $r_0$  et de la constante de gravitation  $G$ .
6. Exprimer la période de révolution  $T_0$  du satellite autour de l'astre ainsi que son énergie mécanique  $E_0$ . Retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.

On souhaite faire se rencontrer ces deux satellites. Pour cela, on augmente quasi-instantanément la vitesse du satellite A de  $v_0$  à la vitesse  $v_1 = Kv_0$  avec  $K > 1$ . On admet alors qu'immédiatement après la poussée, A se trouve au périhélie de sa nouvelle trajectoire elliptique (voir schéma).

7. Montrer que la nouvelle trajectoire est elliptique uniquement si  $K < \sqrt{2}$ .
8. On choisit  $K$  de sorte que le satellite B ait le temps d'effectuer légèrement plus d'une révolution sur sa trajectoire tandis que A effectue une révolution complète. Exprimer la période de révolution  $T$  de A pour laquelle les deux satellites se rencontrent au niveau du périhélie de la trajectoire elliptique. On exprimera  $T$  en fonction de  $T_0$  et  $\alpha$ .
9. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire elliptique, en fonction du demi grand-axe  $a$ . En déduire l'expression de  $a$  en fonction de  $r_0$  et  $K$ .
10. En vous appuyant sur la troisième loi de Kepler, montrer que  $K$  vérifie la relation suivante :

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 (2 - K^2)^3 = 1$$

11. AN :  $\alpha = 50^\circ$ . Déterminer numériquement  $K$ .